泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（七）

命题人：饶真平 彭耿铃 20201030

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1.欧拉是十八世纪伟大的数学家，他巧妙地把自然对数的底数e、虚数单位i、三角函数$\cos\theta$和$\sin\theta$联系在一起，得到公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，这个公式被誉为“数学的天桥”，根据该公式。可得$\left|e^{\frac{\pi}{2}i}+1\right|=$（　　）

A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{5}$

2.若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线的倾斜角为$120^\circ$，则该双曲线离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．2　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\sqrt{5}$

3.已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$的右焦点为$F$，$O$为坐标原点，$C$上有且只有一个点$P$满足$|OF|=|FP|$，则$C$的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$　　　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$　　　　C．$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$　　　　D．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

4.在平面直角坐标系xOy中，直线$l:kx-y+4k=0$与曲线$y=\sqrt{9-x^2}$交于A,B两点，且$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=2$，则$k=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．1　　　　D．$\sqrt{3}$

5.已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，焦点到渐近线距离为$2$，则双曲线$C$实轴长（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．2　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．4

6.已知P是边长为2的正方形$ABCD$所在平面内一点，则$\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})$的最小值为（　　）

A．-1　　　　B．-3　　　　C．$-\frac{1}{2}$　　　　D．$-\frac{3}{2}$

7.已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A_1,A_2$，且以线段$A_1A_2$为直径的圆与直线$bx-ay+2ab=0$相切，则$C$的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　D．$\frac{1}{3}$

8.设双曲线$E:\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点分别为$F_1,F_2$，$P$为双曲线$E$左支上一点（与$F_1,F_2$不共线），则$\Delta PF_1F_2$的内心的横坐标为（　　）

A．$-\sqrt{5}$　　　　B．-3　　　　C．-2　　　　D．-1

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 已知函数 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$，则（　　）

A.　$f(x)$ 的最小正周期为 π

B.　$y=f(x)$ 的图象关于 $(\dfrac{\pi}{6},0)$ 对称

C.　$f(x)$ 在 $[\dfrac{\pi}{6},m]$ 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$，则 m 的最大值为 $\dfrac{\pi}{2}$

D.　将函数 $g(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ 的图象向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位后，可得到 $f(x)$ 的图象

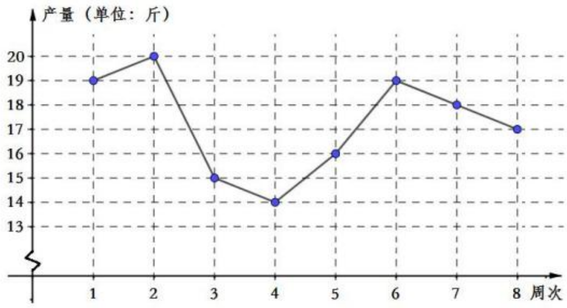
10. 某校在劳动基地开展开垦菜地、种植蔬菜的实践活动. 某班级统计其负责菜地连续八周的蔬菜周产量(单位：斤)，并制作折线图如图所示. 根据折线图信息，下列结论中正确的是（　　）

A. 这八周周产量的众数为19

B. 共有 4 周周产量超过周产量的平均数

C. 这八周周产量的中位数小于周产量的平均数

D. 前四周周产量的方差大于后四周周产量的方差



11. 已知曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{k-2}+\dfrac{y^2}{6-k}=1(k\in\mathbf{R})$，则下列结论正确的是（　　）

A.　当 $k=4$ 时，曲线 C 为圆

B.　当 $k=0$ 时，曲线 C 为双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

C.“$k>4$”是“曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆”的充分而不必要条件

D.　存在实数 k 使得曲线 C 为双曲线，其离心率为 $\sqrt{2}$

12. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在线段 B_1C 上，$B_1M=2MC$，过 A,C_1,M 三点的平面截正方体所得的截面记为 Ω，记 BD 与截面 Ω 的交点为 N，则（　　）

A.　截面 Ω 的形状为等腰梯形　　　　B.　$BD=3BN$

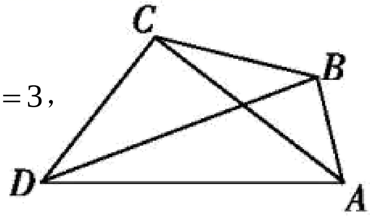
C.　$MN\perp$ 平面 B_1CD_1　　　　D.　三棱锥 $C-MND_1$ 的体积为 $\dfrac{4}{9}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

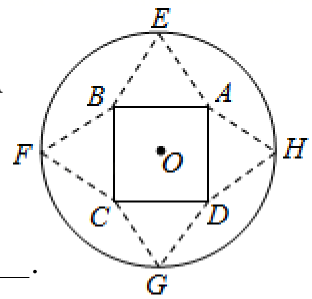
13. 已知两定点 $A(-2,0)$ 和 $B(2,0)$，椭圆 C 以 A,B 为焦点且经过动点 P，若点 $P(0,2)$，则椭圆标准方程为________________；
若动点 $P(x,y)$ 在直线 $l:y=x+3$ 上移动，则椭圆 C 的离心率的最大值为______________.

14. 双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，一个焦点为 $F(0,-8)$，则该双曲线的标准方程为__________；
已知点 $A(-6,0)$，若点 P 为 C 上一动点，且 P 点在 x 轴上方，
当点 P 的位置变化时，ΔPAF 的周长的最小值为____________.

15. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp CD$，$\angle CAB=45^\circ$，$AB=2$，$BC=3$，则 $\cos\angle ACB=$____________，若 $DC=2\sqrt{2}$，则 $BD=$____________.



16. 如图．圆形纸片的圆心为O，半径为$4cm$，该纸片上的正方形$ABCD$的中心为O，E,F,G,H为圆O上的点，$\Delta ABE,\Delta BCF,\Delta CDG,\Delta ADH$分别是以$AB,BC,CD,DA$为底边的等腰三角形．沿虚线剪开后，分别以$AB,BC,CD,DA$为折痕，折起$\Delta ABE,\Delta BCF,\Delta CDG,\Delta ADH$，使得$E,F,G,H$重合，得到一个四棱锥．当$AB=2cm$时，该四棱锥的表面积为______；该四棱锥的外接球的表面积为__________．



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分．）

17.（本小题满分 10 分）已知点$A\left(0,-2\right)$，椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$F$是椭圆$E$的右焦点，直线$AF$的斜率为$2$，$O$为坐标原点．

（Ⅰ）求E的方程；

（Ⅱ）设过点$P\left(0,\sqrt{3}\right)$且斜率为k的直线l与椭圆E交于不同的两M,N，且$|MN|=\dfrac{8\sqrt{2}}{7}$，求$k$的值.

18.（本小题满分 12 分）设ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$2c\cos C=a\cos B+b\cos A$

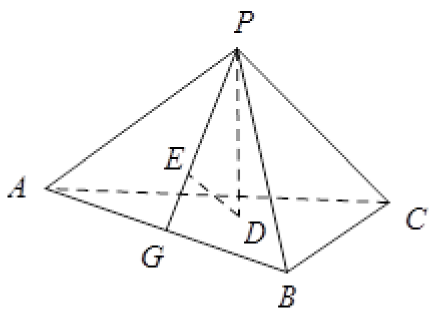
（Ⅰ）求角C；

（Ⅱ）若ΔABC的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，且$a+b=5$，求c.

19.（本小题满分 12 分）如图，已知正三棱锥$P-ABC$的侧面是直角三角形，$PA=6$，顶点P在平面ABC内的正投影为点D，D在平面PAB内的正投影为点E，连结PE并延长交AB于点G.

（Ⅰ）证明：G是AB的中点；

（Ⅱ）在图中作出点E在平面PAC内的正投影F（说明作法及理由），并求四面体$PDEF$的体积.



20.（本小题满分 12 分）已知$\odot M$过点$A(\sqrt{3},0)$，且与$\odot N:(x+\sqrt{3})^2+y^2=16$内切，设$\odot M$的圆心$M$的轨迹为曲线$C$.

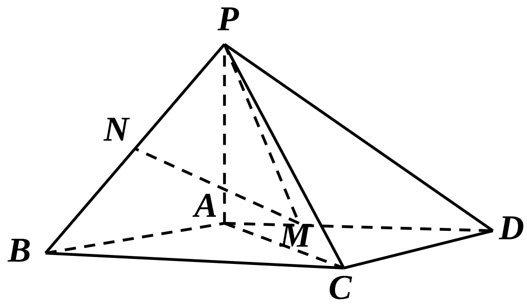
（Ⅰ）求曲线C的方程；

（Ⅱ）设直线l不经过点$B(2,0)$且与曲线C相交于P,Q两点．若直线PB与直线QB的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$，判断直线l是否过定点，若过定点，求出此定点坐标；若不过定点，请说明理由．

21.（本小题满分 12 分）如图，四棱锥$P-ABCD$中，侧棱$PA\perp$底面$ABCD$，$AB=AC=AD=3$，$2AM=MD$，N为PB的中点，$AD//BC$，$MN//$平面PCD，$PA=2$.

（Ⅰ）求BC的长；

（Ⅱ）求二面角$N-PM-D$的余弦值．



22.（本小题满分 12 分）已知圆$O:x^2+y^2=3$，直线PA与圆O相切于点A，直线PB垂直y轴于点B，且$|PB|=2|PA|$.

（Ⅰ）求点P的轨迹E的方程；

（Ⅱ）直线PA与E相交于P,Q两点，若$\triangle POA$的面积是$\triangle QOA$的面积的两倍，求直线PA的方程．

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（七）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1---8：BBDC CAAA

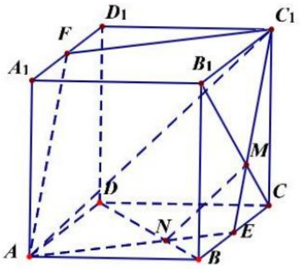
二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. AC　　10. ABD　　11. AB　　12. BCD

12.【解析】对 A，如图，连接 C_1M 交 BC 于 E，$\because \triangle B_1MC_1 \backsim \triangle CME$　$\therefore \dfrac{B_1C_1}{CE}=\dfrac{B_1M}{MC}=2$

即 E 是中点，取 A_1D_1 中点 F，连接 AE、AF、C_1F，

故 $AF \parallel C_1E$，即菱形 AEC_1F 为 Ω 与正方体的截面。



对 B，同理可得 $\triangle AND \backsim \triangle ENB$　$\therefore \dfrac{DN}{NB}=\dfrac{AD}{BE}=2 \therefore BD=3BN$

对 C，连接 AC_1，由前两个相似三角形可知 $\dfrac{EM}{MC_1}=\dfrac{EN}{NA}=\dfrac{1}{2}\therefore MN//AC_1$，

在正方体中，$AC_1 \perp$ 平面B_1CD_1，$\therefore MN \perp$ 平面B_1CD_1

对 D，$\because MN=\dfrac{1}{3}AC_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$S_{\triangle B_1CD_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$，$S_{MCD_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle B_1CD_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore V_{C-MND_1}=\dfrac{1}{3}MN\cdot S_{MCD_1}=\dfrac{1}{3}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4}{9}$　综上，选 BCD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

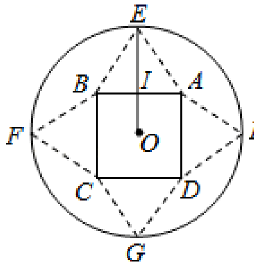
13. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；$\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$　14. $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{48}=1$；28　15. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$；5　16. $16cm^2$；$\dfrac{25}{2}\pi cm^2$

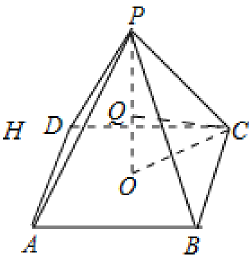
16.【解析】连接 OE 交 AB 于点 I，设 E,F,G,H 重合于点 P，正方形边长为 2，则 $OI=1$，$IE=3$，$AE=\sqrt{10}$，设该四棱锥的外接球的球心为 Q，半径为 R，则 $OC=\sqrt{2}$，$OP=\sqrt{10-2}=2\sqrt{2}$，

则 $R^2=(2\sqrt{2}-R)^2+(\sqrt{2})^2$，解得 $R=\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$，

外接球的表面积 $S=4\pi\times(\dfrac{5}{2\sqrt{2}})^2=\dfrac{25}{2}\pi cm^2$；

该四棱锥的表面积为 $4\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 3+2\times 2=16cm^2$.





四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17. 解：（Ⅰ）由离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $a=\sqrt{2}c$，直线 AF 的斜率 $k=\dfrac{0-(-2)}{c-0}=2$，则 $a=\sqrt{2},c=1,b^2=1$，

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；　…………………………………4 分

（Ⅱ）设直线 $l: y=kx+\sqrt{3}$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，　…………………………………5 分

则 $\begin{cases} y=kx-\sqrt{3} \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，整理得 $(1+2k^2)x^2+4\sqrt{3}kx+4=0$，　…………………………………6 分

由 $\Delta=(4\sqrt{3}k)^2-16(1+2k^2)>0$ 得 $k^2>1$，且 $x_1+x_2=-\dfrac{4\sqrt{3}k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{1+2k^2}$，………8 分

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{(1+k^2)(k^2-1)}}{1+2k^2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{7}$，

即$17k^4-32k^2-57=0$，解得：$k^2=3$或$-\dfrac{19}{17}$（舍去）$\therefore k=\pm\sqrt{3}$，……………………10 分

18. 解：（Ⅰ）由正弦定理知，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，因为$2c\cos C=a\cos B+b\cos A$，…………………2 分

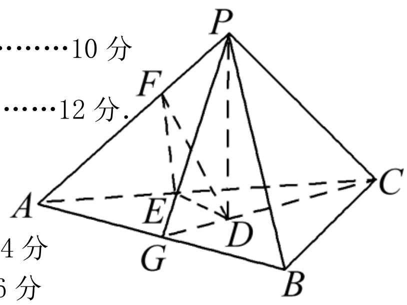
所以$2\sin C\cos C=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$．因为$\sin C\neq 0$，所以$\cos C=\dfrac{1}{2}$，

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………………6 分

（Ⅱ）由$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$知，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}ab\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$ab=6$，……………………………8 分

又$a+b=5$，所以$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times 6=13$，………10 分

所以$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=13-2\times 6\times\dfrac{1}{2}=7$即$c=\sqrt{7}$……………12 分.



19. 解：（Ⅰ）因为P在平面ABC内的正投影为D，所以$AB\perp PD$.

因为D在平面PAB内的正投影为E，所以$AB\perp DE$.

所以$AB\perp$平面PED，故$AB\perp PG$.……………………………4 分

又由已知可得，$PA=PB$，从而G是AB的中点.……………6 分

（Ⅱ）在面PAB内，过点E作PB的平行线交PA于点F，F即为E在面PAC内的正投影.…7 分

理由如下：由已知可得$PB\perp PA$，$PB\perp PC$，又$EF//PB$，

所以$EF\perp PA$，$EF\perp PC$，因此$EF\perp$平面PAC，即F为E在平面PAC内的正投影.

连接CG，因为P在平面ABC内的正投影为D，

所以D是正三角形ABC的中心，由（Ⅰ）知，G是AB中点，所以D在CG上，故$CD=\dfrac{2}{3}CG$.

由题设可得$PC\perp$平面PAB，$DE\perp$平面PAB，所以$DE//PC$，

因此$PE=\dfrac{2}{3}PG$，$DE=\dfrac{1}{3}PC$.

由已知，正三棱锥的侧面是直角三角形且$PA=6$，可得$DE=2$，$PE=2\sqrt{2}$.…………10 分

在等腰直角三角形EFP中，可得$EF=PF=2$.

所以四面体$PDEF$的体积$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\dfrac{4}{3}$.………………………………………12 分

20. 解：（Ⅰ）设$\odot M$的半径为R，因为$\odot M$过点$A(\sqrt{3},0)$，且与$\odot N$相切，

所以$\begin{cases}R=|MA|\\|MN|=4-R\end{cases}$，即$|MN|+|MA|=4$．因为$|NA|<4$，………………………………3 分

所以点M的轨迹是以N，A为焦点的椭圆．设椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则$2a=4$，且$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，所以$a=2$，$b=1$.

所以曲线C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.……………………………………5 分

（Ⅱ）法 1：依题意，直线$BP,\ BQ$的斜率均存在且不为0，设直线BP的斜率为$k(k\neq 0)$，

则直线BP的方程为$y=k(x-2)$.…………………………………6 分

由$\begin{cases}y=k(x-2)\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$，…………………………7 分

解之得 $x_1=2$，$x_2=\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}$. 因此点 P 的坐标为$\left(\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2},\dfrac{-4k}{1+4k^2}\right)$. ………8 分

因为直线 BQ 的斜率为$-\dfrac{1}{2k}$，所以可得点 Q 的坐标为$\left(\dfrac{2-2k^2}{1+k^2},\dfrac{2k}{1+k^2}\right)$. ……9 分

当 $k\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，直线 l 的斜率为 $k_{PQ}=\dfrac{3k}{2(1-2k^2)}$.

所以直线 l 的方程为 $y-\dfrac{2k}{1+k^2}=\dfrac{3k}{2(1-2k^2)}\left(x-\dfrac{2-2k^2}{1+k^2}\right)$，……………………11 分

整理得 $y=\dfrac{3k}{2(1-2k^2)}x-\dfrac{k}{1-2k^2}$. 即 $y=\dfrac{3k}{2(1-2k^2)}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$, 此时直线 l 过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $x=\dfrac{2}{3}$，显然过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. ………………12 分

综上所述，直线 l 过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

法 2：当直线 l 的斜率不存在时，设直线 l 的方程为：$x=x_1$. 设点 $P(x_1,y_1)$，则点 $Q(x_1,-y_1)$，

依题意 $x_1\neq2$，因为 $k_{BP}\cdot k_{BQ}=\dfrac{y_1}{x_1-2}\times\dfrac{-y_1}{x_1-2}=-\dfrac{{y_1}^2}{{x_1}^2-4x_1+4}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 ${y_1}^2=\dfrac{{x_1}^2-4x_1+4}{2}$. 因为 $\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$，且 $x_1\neq2$，解得 $x_1=\dfrac{2}{3}$. …………6 分

此时直线 l 的方程为 $x=\dfrac{2}{3}$. 当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$. ……………………………7 分

需要满足 $\Delta=(8km)^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$，即 $m^2<4k^2+1$.

设点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则有 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{4k^2+1}$. ………8 分

因为 $y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$，所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=\dfrac{m^2-4k^2}{4k^2+1}$.

因为 $k_{BP}k_{BQ}=\dfrac{y_1}{x_1-2}\times\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4=-2y_1y_2$. ……………………………………………10 分

即 $\dfrac{4(m^2-1)}{4k^2+1}+\dfrac{16km}{4k^2+1}+4=-\dfrac{2(m^2-4k^2)}{4k^2+1}$，即 $3m^2+8km+4k^2=0$.

所以 $m=-\dfrac{2}{3}k$ 或 $m=-2k$. ……………………………………………11 分

当 $m=-\dfrac{2}{3}k$ 时，满足 $m^2<4k^2+1$，直线 l 为 $y=k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$，恒过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

当 $m=-2k$ 时，满足 $m^2<4k^2+1$，直线 l 为 $y=k(x-2)$，过定点 $(2,0)$，不合题意.

显然直线 $x=\dfrac{2}{3}$ 也过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，综上所述，直线 l 过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. …………12 分

21. 解：（Ⅰ）取 PC 的中点 E，连接 EN、ED，则 NE 为 $\triangle PBC$ 的中位线，

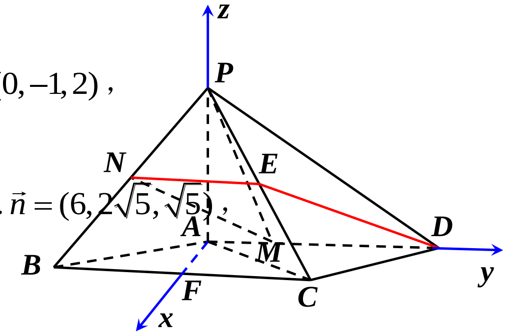
$\therefore EN // BC$，所以 M,N,E,D 四点共线，

因为 $MN //$ 平面 PCD，平面 $PCD \cap$ 平面 $MNED = ED$，所以 $MN // ED$，

所以 $MNED$ 为平行四边形，所以 $EN = MD = 2$，$BC = 2EN = 4$.············6 分

（Ⅱ）取 BC 中点 F，因为 $AB = AC$，所以 $AF \perp BC$，且 $AF = \sqrt{5}$，又 $AD // BC$，$\therefore AF \perp AD$，

于是以 A 为坐标原点，AF 为 x 轴，AD 为 y 轴，AP 为 z 轴建立如图所示空间直角坐标系，



显然平面 PMD 的法向量 $\vec{m} = (1,0,0)$，

$B(\sqrt{5},-2,0), M(0,1,0), P(0,0,2), \therefore \overrightarrow{MB} = (\sqrt{5},-3,0), \overrightarrow{MP} = (0,-1,2)$，

设平面 PBM 的法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{MB} = \sqrt{5}x - 3y = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MP} = -y + 2z = 0 \end{cases}$，取 $y = 2\sqrt{5}$，则 $x = 6, z = \sqrt{5}$，$\therefore \vec{n} = (6, 2\sqrt{5}, \sqrt{5})$，

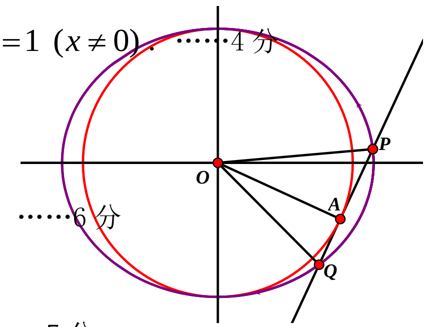
$\therefore \cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{6}{1\times\sqrt{61}} = \dfrac{6\sqrt{6}}{61}$，

由图可知二面角 $N-PM-D$ 为钝角，所以其余弦值为 $-\dfrac{6\sqrt{6}}{61}$. ·········12 分

22. 解：（Ⅰ）设 $P(x,y)$，则 $|PA|^2 = |PO|^2 - 3 = x^2 + y^2 - 3$ $|PB|^2 = x^2$，···3 分

由 $|PB| = 2|PA|$，得 $|PB|^2 = 4|PA|^2$，所以 $x^2 = 4(x^2 + y^2 - 3)$，

化简得：$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. 故点 P 的轨迹 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1\ (x \neq 0)$. ······4 分



（Ⅱ）当直线 PA 的斜率不存在时，不满足题意. ······5 分

设直线 $PA: y = kx + m,\ P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$.

由直线 PA 与圆相切，可得 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{3},\ m^2 = 3(k^2+1)$. ······6 分

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2 + 8kmx + (4m^2 - 12) = 0$，···7 分

所以 $x_1 + x_2 = \dfrac{-8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2 = \dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$. ······8 分

由 $S_{\triangle POA} = 2S_{\triangle QOA}$，得 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|PA| = 2\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|QA|\right), |PA| = 2|QA|, |x_1| = 2|x_2|$.

因为 $x_1x_2 = \dfrac{4m^2-12}{3+4k^2} = \dfrac{12k^2}{3+4k^2} > 0$，所以 $x_1 = 2x_2$. ·········10 分

$\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = \dfrac{\left(\dfrac{-8km}{3+4k^2}\right)^2}{\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}} = \dfrac{16k^2m^2}{(3+4k^2)(m^2-3)} = \dfrac{16(k^2+1)}{3+4k^2}$，$\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = \dfrac{(2x_2+x_2)^2}{2x_2^2} = \dfrac{9}{2}$，

$\therefore \dfrac{16(k^2+1)}{3+4k^2} = \dfrac{9}{2}$，解得 $k = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, m = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

故直线 PA 的方程为 $y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

或 $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ····················12 分