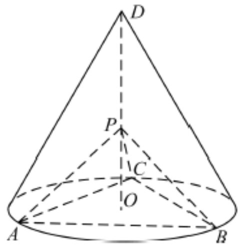
泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（一）

命卷人：陈景文

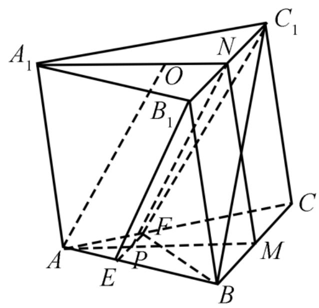
1.【2020 年高考全国Ⅰ卷】如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC=90°$．



（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC；

（2）设 $DO=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.

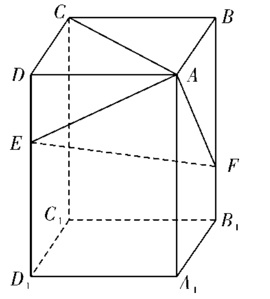
2.【2020 年高考全国Ⅱ卷】如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点．过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E，交 AC 于 F.



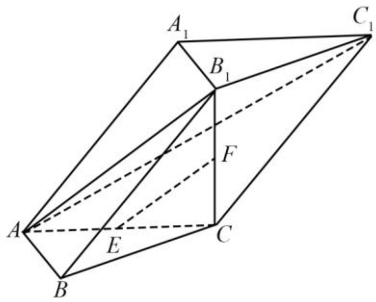
（1）证明：$AA_1//MN$，且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F；

（2）设 O 为$\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，若 $AO=AB=6$，$AO//$平面 EB_1C_1F，且$\angle MPN=\dfrac{\pi}{3}$，求四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积.

3．【2020 年高考全国Ⅲ卷】如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E， F 分别在棱 DD_1， BB_1 上，且 $2DE=ED_1$， $BF=2FB_1$．证明：

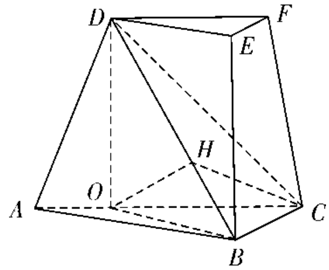


（1）当 $AB=BC$ 时， $EF\perp AC$；（2）点 C_1 在平面 AEF 内．



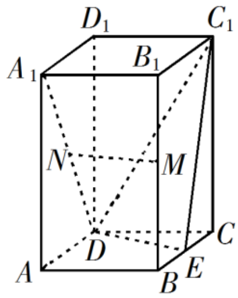
4．【2020 年高考江苏】在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$B_1C\perp$ 平面 ABC，E，F 分别是 AC，B_1C 的中点．（1）求证：$EF\parallel$ 平面 AB_1C_1；（2）求证：平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1．

5．【2020年高考浙江】如图，在三棱台$ABC—DEF$中，平面$ACFD\perp$平面ABC，$\angle ACB=\angle ACD=45°$，$DC=2BC$．（Ⅰ）证明：$EF\perp DB$；（Ⅱ）求直线$DF$与平面$DBC$所成角的正弦值．



6．【2019年高考全国Ⅰ卷】如图，直四棱柱$ABCD–A_1B_1C_1D_1$的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N分别是BC，BB_1，A_1D的中点．

（1）证明：MN∥平面C_1DE；（2）求点C到平面C_1DE的距离．



7.【2019年高考全国Ⅱ卷】长方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EC_1$.

（1）证明：$BE\perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE=A_1E$，$AB=3$，求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.

8.【2019年高考全国Ⅲ卷】图1是由矩形 $ADEB$，Rt△ABC 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$，

$BE=BF=2$，

$\angle FBC=60°$. 将其沿 AB，BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG，如图2.

（1）证明：图2中的 A，C，G，D 四点共面，且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$；

（2）求图2中的四边形 $ACGD$ 的面积.

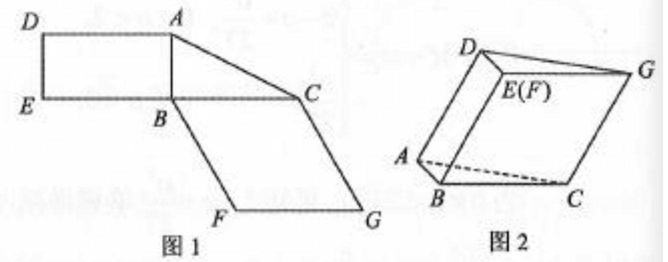


图1　　图2

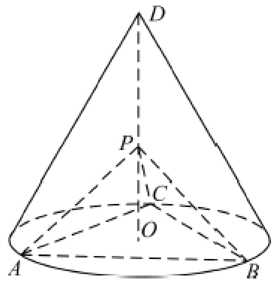
泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（一）参考答案

命卷人： 陈景文

1．【2020 年高考全国Ⅰ卷】如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC=90°$．

（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC；

（2）设 $DO=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



【解析】（1）由题设可知，$PA=PB=PC$.

由于 $\triangle ABC$ 是正三角形，故可得 $\triangle PAC\cong\triangle PAB$．$\triangle PAC\cong\triangle PBC$．

又 $\angle APC=90°$，故 $\angle APB=90°$，$\angle BPC=90°$．

从而 $PB\perp PA$，$PB\perp PC$，故 $PB\perp$ 平面 PAC，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAC．

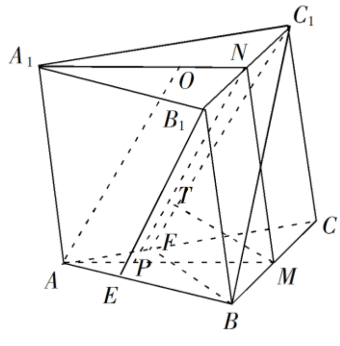
（2）设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l．由题设可得 $rl=\sqrt{3}$，$l^2-r^2=2$．解得 $r=1$，$l=\sqrt{3}$，

从而 $AB=\sqrt{3}$．由（1）可得 $PA^2+PB^2=AB^2$，故 $PA=PB=PC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

所以三棱锥 P-ABC 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times PA\times PB\times PC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^3=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$．

2．【2020 年高考全国Ⅱ卷】如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点．过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E，交 AC 于 F.

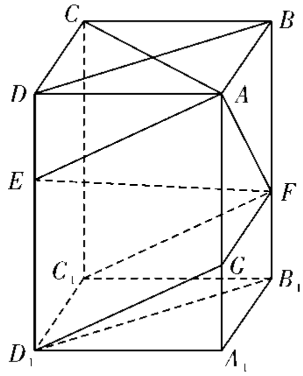
（1）证明：$AA_1//MN$，且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F；（2）设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，若 $AO=AB=6$，$AO//$ 平面 EB_1C_1F，且 $\angle MPN=\dfrac{\pi}{3}$，求四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积.



【解析】（1）因为 M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，所以 $MN\,/\!/\,CC_1$．又由已知得 $AA_1\,/\!/\,CC_1$，故 $AA_1\,/\!/\,MN$．因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 是正三角形，所以 $B_1C_1\perp A_1N$．又 $B_1C_1\perp MN$，故 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1AMN．所以平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F．

（2）$AO\,/\!/$ 平面 EB_1C_1F，$AO\subset$ 平面 A_1AMN，平面 $A_1AMN\cap$ 平面 $EB_1C_1F=PN$，故 $AO\,/\!/\,PN$.又 $AP\,/\!/\,ON$，故四边形 $APNO$ 是平行四边形，所以 $PN=AO=6$，$AP=ON=\dfrac{1}{3}AM=\sqrt{3}$，$PM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{3}$，$EF=\dfrac{1}{3}BC=2$．因为 $BC\,/\!/$ 平面 EB_1C_1F，所以四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的顶点 B 到底面 EB_1C_1F 的距离等于点 M 到底面 EB_1C_1F 的距离．作 $MT\perp PN$，垂足为 T，则由（1）知，$MT\perp$ 平面 EB_1C_1F，故 $MT=PM\sin\angle MPN=3$．底面 EB_1C_1F 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times(B_1C_1+EF)\times PN=\dfrac{1}{2}(6+2)\times 6=24$. 所以四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times 24\times 3=24$．

3．【2020 年高考全国Ⅲ卷】如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E ， F 分别在棱 DD_1 ， BB_1 上，且 $2DE=ED_1$ ， $BF=2FB_1$ ．证明：



（1）当 $AB=BC$ 时， $EF\perp AC$ ；（2）点 C_1 在平面 AEF 内．

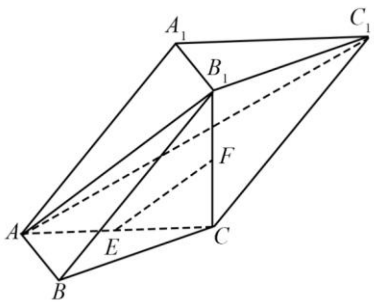
【解析】（1）如图，连结 BD ， B_1D_1 ．因为 $AB=BC$ ，所以四边形 $ABCD$ 为正方形，故 $AC\perp BD$ ．又因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$ ，于是 $AC\perp BB_1$ ．

所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D ．由于 $EF\subset$ 平面 BB_1D_1D ，所以 $EF\perp AC$ ．

（2）如图，在棱 AA_1 上取点 G ，使得 $AG=2GA_1$ ，连结 GD_1 ， FC_1 ， FG ，

因为 $D_1E=\dfrac{2}{3}DD_1$ ， $AG=\dfrac{2}{3}AA_1$ ， $DD_1 \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} AA_1$ ，所以 $ED_1 \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} AG$ ，于是四边形 ED_1GA 为平行四边形，故 $AE\mathbin{/\mkern-5mu/}GD_1$ ．因为 $B_1F=\dfrac{1}{3}BB_1$ ， $A_1G=\dfrac{1}{3}AA_1$ ， $BB_1 \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} AA_1$ ，所以 $FG \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} A_1B_1$ ， $FG \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} C_1D_1$ ，四边形 FGD_1C_1 为平行四边形，故 $GD_1\mathbin{/\mkern-5mu/}FC_1$ ．于是 $AE\mathbin{/\mkern-5mu/}FC_1$ ．所以 A,E,F,C_1 四点共面，即点 C_1 在平面 AEF 内．

4．【2020 年高考江苏】在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$B_1C\perp$ 平面 ABC，E，F 分别是 AC，B_1C 的中点．（1）求证：$EF\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 AB_1C_1；



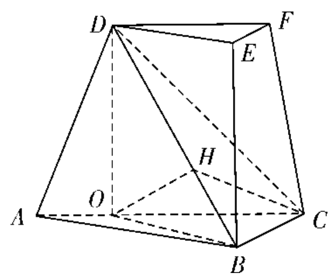
（2）求证：平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1．

【解析】（1）因为 E,F 分别是 AC,B_1C 的中点，所以 $EF\mathbin{/\mkern-5mu/}AB_1$ ．

又 $EF\not\subset$ 平面 AB_1C_1 ， $AB_1\subset$ 平面 AB_1C_1 ，所以 $EF\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 AB_1C_1 ．

（2）因为 $B_1C\perp$ 平面 ABC ， $AB\subset$ 平面 ABC ,所以 $B_1C\perp AB$.又 $AB\perp AC$, $B_1C\subset$ 平面 AB_1C_1 , $AC\subset$ 平面 AB_1C , $B_1C\cap AC=C$,所以 $AB\perp$ 平面 AB_1C .又因为 $AB\subset$ 平面 ABB_1 ,所以平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1 .

5．【2020年高考浙江】如图，在三棱台ABC—DEF中，平面$ACFD\perp$平面ABC，$\angle ACB=\angle ACD=45°$ ，$DC=2BC$．（Ⅰ）证明：$EF\perp DB$；（Ⅱ）求直线DF与平面DBC所成角的正弦值．



【解析】（Ⅰ）如图，过点 D 作 $DO\perp AC$ ，交直线 AC 于点 O ，连结 OB.

由 $\angle ACD=45°$ ， $DO\perp AC$ 得 $CD=\sqrt{2}CO$ ，

由平面 $ACFD\perp$ 平面 ABC 得 $DO\perp$ 平面 ABC，所以 $DO\perp BC$.

由 $\angle ACB=45°$ ， $BC=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CO$ 得 $BO\perp BC$.

所以 $BC \perp$ 平面 BDO，故 $BC \perp DB$.

由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $BC /\!/ EF$，所以 $EF \perp DB$.

（Ⅱ）过点 O 作 $OH \perp BD$，交直线 BD 于点 H，连结 CH.

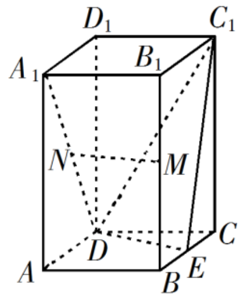
由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $DF /\!/ CO$，所以直线 DF 与平面 DBC 所成角等于直线 CO 与平面 DBC 所成角.

由 $BC \perp$ 平面 BDO 得 $OH \perp BC$，故 $OH \perp$ 平面 BCD，所以 $\angle OCH$ 为直线 CO 与平面 DBC 所成角.

设 $CD = 2\sqrt{2}$. 由 $DO = OC = 2, BO = BC = \sqrt{2}$，得 $BD = \sqrt{6}, OH = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，

所以 $\sin\angle OCH = \dfrac{OH}{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因此，直线 DF 与平面 DBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6.【2019 年高考全国Ⅰ卷】如图，直四棱柱 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点.



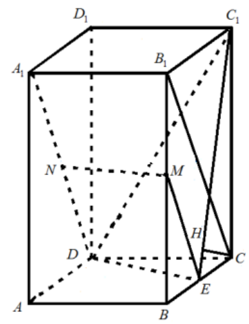
（1）证明：$MN /\!/$ 平面 C_1DE；（2）求点 C 到平面 C_1DE 的距离.

【解析】（1）连结 B_1C, ME. 因为 M，E 分别为 BB_1, BC 的中点，所以 $ME /\!/ B_1C$，且 $ME = \dfrac{1}{2}B_1C$. 又因为 N 为 A_1D 的中点，所以 $ND = \dfrac{1}{2}A_1D$.

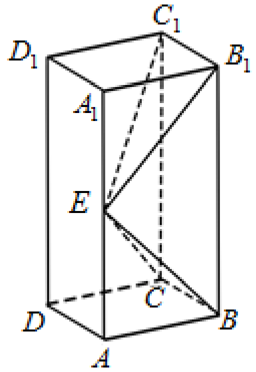
由题设知 $A_1B_1 \underline{\underline{/\!/}} DC$，可得 $B_1C \underline{\underline{/\!/}} A_1D$，故 $ME \underline{\underline{/\!/}} ND$，

因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形，$MN /\!/ ED$. 又 $MN \not\subset$ 平面 C_1DE，所以 $MN /\!/$ 平面 C_1DE.

（2）过 C 作 C_1E 的垂线，垂足为 H. 由已知可得 $DE \perp BC$，$DE \perp C_1C$，所以 $DE \perp$ 平面 C_1CE，故 $DE \perp CH$. 从而 $CH \perp$ 平面 C_1DE，故 CH 的长即为 C 到平面 C_1DE 的距离，由已知可得 $CE=1$，$C_1C=4$，所以 $C_1E = \sqrt{17}$，故 $CH = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$. 从而点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.



7.【2019 年高考全国Ⅱ卷】如图，长方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE \perp EC_1$.



（1）证明：$BE \perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE=A_1E$，$AB=3$，求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.

【解析】（1）由已知得 $B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1，$BE \subset$ 平面 ABB_1A_1，

故 $B_1C_1 \perp BE$．又 $BE \perp EC_1$，所以 $BE \perp$ 平面 EB_1C_1．

（2）由（1）知 $\angle BEB_1=90°$．

由题设知 Rt$\triangle ABE \cong$ Rt$\triangle A_1B_1E$，所以 $\angle AEB = \angle A_1EB_1 = 45^{\circ}$，

故 $AE=AB=3$，$AA_1 = 2AE = 6$．作 $EF \perp BB_1$，垂足为 F，则 $EF \perp$ 平面 BB_1C_1C，且 $EF = AB = 3$．

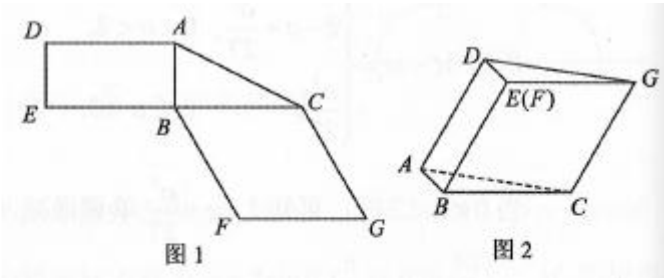
所以，四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times 3 \times 6 \times 3 = 18$．

8．【2019 年高考全国Ⅲ卷】图 1 是由矩形 $ADEB$，Rt△ABC 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$，$BE=BF=2$，

$\angle FBC=60°$．将其沿 AB，BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG，如图 2．

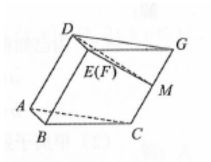
（1）证明：图 2 中的 A，C，G，D 四点共面，且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$；

（2）求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积．



【解析】（1）由已知得 $AD \parallel BE$，$CG \parallel BE$，所以 $AD \parallel CG$，故 AD，CG 确定一个平面，从而 A，C，G，D 四点共面．由已知得 $AB \perp BE$，$AB \perp BC$，故 $AB \perp$ 平面 $BCGE$．

又因为 $AB \subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$．



（2）取 CG 的中点 M，连结 EM，DM．因为 $AB \parallel DE$，$AB \perp$ 平面 $BCGE$，所以 $DE \perp$ 平面 $BCGE$，故 $DE \perp CG$．

由已知，四边形 $BCGE$ 是菱形，且 $\angle EBC=60°$ 得 $EM \perp CG$，故 $CG \perp$ 平面 DEM．

因此 $DM \perp CG$．在 Rt△DEM 中，$DE=1$，$EM=\sqrt{3}$，故 $DM=2$．所以四边形 $ACGD$ 的面积为 4．