泉州七中2020-2021学年度上学期高二年数学周练（五）

命题人：杨小郎　陈智伟　20201017

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1.已知圆$C_1: x^2+y^2-4=0$与圆$C_2: x^2+y^2-4x+4y-12=0$相交于A,B两点，则直线AB的方程为（　　）

A．$x-y+2=0$　B．$x-y+4=0$　C．$x+y-4=0$　D．$x+y-2=0$

2.空间四点$A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$、$D(x,2,3)$共面，则$x=$（　　）

A．-4　B．-1　C．1　D．4

3.已知圆$O: x^2+y^2=r^2$，点$P(a,b)(ab\neq 0)$是圆O内一点，过点P的圆O的最短弦所在的直线为l_1，直线l_2的方程为$ax+by+r^2=0$，那么（　　）

A．$l_1//l_2$，且l_2与圆O相离　B．$l_1\perp l_2$，且l_2与圆O相切

C．$l_1//l_2$，且l_2与圆O相交　D．$l_1\perp l_2$，且l_2与圆O相离

4.已知直线$y=\dfrac{b}{2}$与椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于$A,B$两点，若椭圆$C$的两个焦点与$A,B$两点可以构成一个矩形，则椭圆$C$的离心率为（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　D．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

5.若直线l：$ax-by+2=0(a>0,b>0)$被圆$x^2+y^2+2x-4y+1=0$截得的弦长为4，则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为（　　）

A．2　B．4　C．$\sqrt{2}$　D．$2\sqrt{2}$

6.直线$2x\cos\alpha-y-3=0\left(\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]\right)$的倾斜角的取值范围是（　　）

A．$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$　B．$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$　C．$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$　D．$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$

7.在$\triangle ABC$中，$\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{a+c}{2c}$（$a,b,c$分别为角$A,B,C$的对边），则$\triangle ABC$的形状为（　　）

A．等边三角形　B．直角三角形

C．等腰三角形或直角三角形　D．等腰直角三角形

8.在ΔABC中，$2\sin C\cdot\overrightarrow{CB}=4\sin A\cdot\overrightarrow{CA}+3\sin B\cdot\overrightarrow{AB}$，则$\Delta ABC$形状是（　　）

A．钝角三角形　B．直角三角形　C．锐角三角形　D．无法确定

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分.）

9.已知直线$l_1: ax-y+1=0$，$l_2: x+ay+1=0$，$a\in\mathbf{R}$，以下结论正确的（　　）

A．不论a为何值时，l_1与l_2都互相垂直；

B．当a变化时，l_1与l_2分别经过定点$A(0,1)$和$B(-1,0)$

C．不论a为何值时，l_1与l_2都关于直线$x+y=0$对称

D．如果l_1与l_2交于点M，则$|MO|$的最大值是$\sqrt{2}$

10. 圆 $x^2+y^2-4x-1=0$（　　）

A. 关于点 $(2,0)$ 对称　　B. 关于直线 $y=0$ 对称

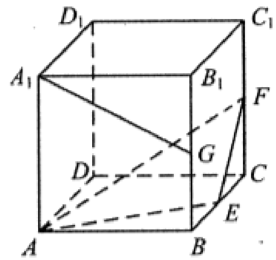
C. 关于直线 $x+3y-2=0$ 对称　　D. 关于直线 $x-y+2=0$ 对称

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列结论正确的是（　　）

A. 四边形 ABC_1D_1 的面积为 $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC_1}|$　　B. $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角为 60°

C. $(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=3\left(\overrightarrow{A_1B_1}\right)^2$　　D. $\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1D_1})=0$

12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，E,F,G 分别为 BC,CC_1,BB_1 的中点．则（　　）



A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直

B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\dfrac{9}{8}$

D. 点 C 和点 G 到平面 AEF 的距离相等

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

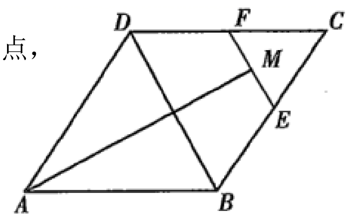
13. 已知三棱锥 $O-ABC$，点 D 是 BC 中点，P 是 AD 中点，

设 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 $x+y+z=$__________；$x=$__________.

14. 已知圆 $C:x^2+y^2+2(a-1)x-12y+2a^2=0$. 当 C 的面积最大时，实数 a 的值为__________；

若此时圆 C 关于直线 $l:mx+ny-6=0$（$m>0$，$n>0$）对称，则 $\dfrac{mn}{3m+n}$ 的最大值为__________.

15. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2,\angle BAD=60^\circ$，E,F 分别是 BC,CD 的中点，



若线段 EF 有一点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}(m\in R)$，

则 $m=$__________，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=$__________.

16. 已知 M 为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一动点，O 为坐标原点，A,B 两点在圆 $C:(x-1)^2+y^2=25$ 上，

且满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=\vec{0}$.

（1）记 AB 中点为 N，则 N 的轨迹方程为____________________；

（2）弦长 $|AB|$ 的取值范围为____________________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）已知 m 为实数，设直线 l_1 的方程为 $2x+my=1$，直线 l_2 的方程为 $mx+8y=m-2$.

（Ⅰ）若 l_1 与 l_2 平行，求 m 的值；

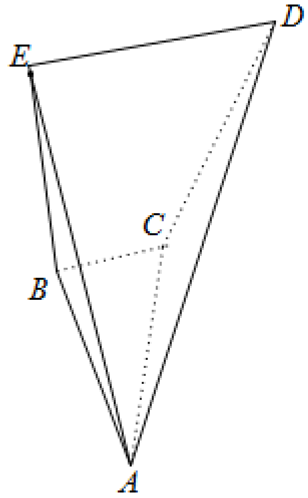
（Ⅱ）当 l_1 与 l_2 相交时，用 m 表示交点 A 的坐标，并说明点 A 一定在某一条定直线上.

18.（本小题满分 12 分）如图，已知四棱锥 $A-BCDE$， $BE\perp$ 平面 ABC，$DE\,//\,BC$， $DE=EB=AB=3BC=3$， $AC=\sqrt{10}$.

（Ⅰ）求证： $DE\perp$ 平面 ABE；

（Ⅱ）求证：在线段 AD 上存在一点 M，使得 $CM\perp AE$，并指明点 M 的位置；

（Ⅲ）求二面角 $B-AD-E$ 的大小.



19.（本小题满分 12 分）已知 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边为 a,b,c， 向量 $\vec{m}=(2\cos\frac{C}{2},-\sin C)$，$\vec{n}=(\cos\frac{C}{2},2\sin C)$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$.

（Ⅰ）求角 C；

（Ⅱ）若 $a^2=b^2+\frac{1}{2}c^2$，试求 $\sin(A-B)$ 的值.

20.（本小题满分 12 分）如图 1，梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，过 A,B 分别作 $AE\perp CD$，$BF\perp CD$，垂足分别为 E,F. 若 $AB=AE=2$，$CD=5$，$DE=1$，将梯形 $ABCD$ 沿 AE，BF 折起，且平面 $ADE\perp$ 平面 $ABFE$（如图 2）.

（Ⅰ）证明：$AF\perp BD$；

（Ⅱ）若 $CF\parallel DE$，在线段 AB 上是否存在一点 P，使得直线 CP 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$，若存在，求出 AP 的值，若不存在，说明理由.

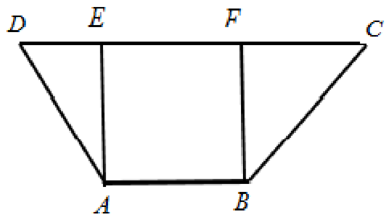


图 1

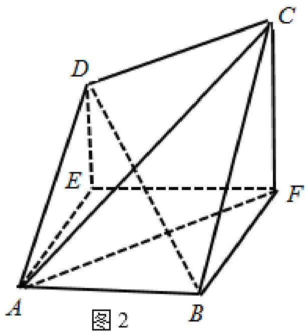
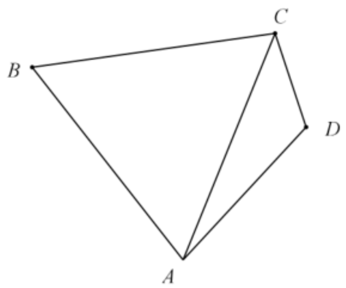


图 2

21.（本小题满分 12 分）已知 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，满足 $(2a-c)\cos B=b\cos C$.

（Ⅰ）求 B 的大小；

（Ⅱ）如图，$AB=AC$，在直线 AC 的右侧取点 D，使得 $AD=2CD=4$. 当角 D 为何值时，四边形 $ABCD$ 面积最大.



22.（本小题满分 12 分）已知动点 M 在椭圆 $C:x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，过点 M 作 y 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overline{NP}=2\overline{NM}$.

（Ⅰ）求点 P 的轨迹方程 E；

（Ⅱ）已知点 $A(0,2)$，若直线 $y=kx+\dfrac{2}{3}$ 与 P 点轨迹交于 G,H 两点，证明：论 k 取何值时，直线 AG 和 AH 的斜率之积均是定值，并求出该定值.

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（五）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1—4：AAAC　　5—8：BBBA

8.【解析】由 $2\sin C\cdot\overrightarrow{CB}=4\sin A\cdot\overrightarrow{CA}+3\sin B\cdot\overrightarrow{AB}$ 得 $2\sin C\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=4\sin A\cdot\overrightarrow{CA}+3\sin B\cdot\overrightarrow{AB}$,

$\therefore\left(2\sin C-4\sin A\right)\cdot\overrightarrow{CA}=\left(3\sin B-2\sin C\right)\cdot\overrightarrow{AB}$, 因为 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}$ 不共线,

故 $2\sin C-4\sin A=3\sin B-2\sin C=0$ 由正弦定理有 $2c-4a=3b-2c=0$,

$\therefore a=\dfrac{1}{2}c$, $b=\dfrac{2}{3}c$, 令 $c=6$, 则 $a=3$, $b=4$, $\because a^2+b^2-c^2=9+16-36=-11<0$

$\therefore C$ 为钝角, 故 ΔABC 是钝角三角形,

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9、ABD　　10、ABC　　11、ACD　　12、BC

12.【解析】取 DD_1 的中点 N，连接 AN，则 AN 为直线 AF 在平面 ADD_1A_1 内的射影，

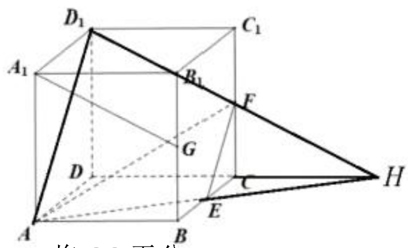
AN 与 DD_1 不垂直，从而 AF 与 DD_1 也不垂直，选项 A 错误；

取 B_1C_1 的中点为 M，连接 A_1M,GM，则 $A_1M//AE,GM//EF$，

易证：平面 $A_1MG//$ 平面 AEF，从而 $A_1G//$ 平面 AEF，选项 B 正确；

连接 AD_1，D_1F，易知四边形 $AEFD_1$ 为平面 AEF 截正方体所得的截面四边形（如图所示），

且 $D_1H=AH=\sqrt{5}$，$A_1D=\sqrt{2}$，



所以 $S_{\Delta AD_1H}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}=\dfrac{3}{2}$，

而 $S_{AEFD_1}=\dfrac{3}{4}S_{\Delta AD_1H}=\dfrac{9}{8}$，从而选项 C 正确；

假设点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等，即平面 AEF 将 CG 平分，

则平面 AEF 必过 CG 的中点，连接 CG 交 EF 于点 O，

易知 O 不是 CG 的中点，故假设不成立，从而选项 D 错误.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．1；$\dfrac{1}{2}$　　14．-1；$\dfrac{3}{16}$　　15．$\dfrac{5}{6}$；$-\dfrac{1}{3}$　　16．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；$\left[8,4\sqrt{6}\right]$

16.【解析】设 $N\left(x,y\right)$，$M\left(x_0,y_0\right)$，由题知：因为 AB 中点为 N，所以 $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

又因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=\vec{0}$，所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OM}$，

所以 $\overrightarrow{ON}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OM}$，即 $\begin{cases}x_0=-2x\\ y_0=-2y\end{cases}$. 又因为 $M\left(-2x,-2y\right)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 上，

所以 $\dfrac{\left(-2x\right)^2}{16}+\dfrac{\left(-2y\right)^2}{12}=1$，即 N 的轨迹方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

因为 $|AB|^2=4\left(5^2-|CN|^2\right)=100-4|CN|^2$，设 $N\left(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta\right)$，$\theta\in\left[0,2\pi\right]$，$C\left(1,0\right)$，

所以 $|CN|^2=\left(2\cos\theta-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2=4\cos^2\theta+4\cos\theta+1+3\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta+4\cos\theta+4=\left(\cos\theta+2\right)^2$，$\theta\in\left[0,2\pi\right]$，

所以 $1\le|CN|^2\le9$，$|AB|^2=100-4|CN|^2\in\left[64,96\right]$，即 $|AB|\in\left[8,4\sqrt{6}\right]$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）$\because l_1$ 与 l_2 平行，则 $\begin{cases} m^2-16=0 \\ 2(m-2)\neq m \end{cases}$，解得 $m=-4$；……………………………5 分（无检验扣 2 分）

（Ⅱ）联立 $\begin{cases} 2x+my=1 \\ mx+8y=m-2 \end{cases}$，解得 $x=\dfrac{m+2}{m+4}$，$y=-\dfrac{1}{m+4}$，……………………………8 分

所以点 $A\left(\dfrac{m+2}{m+4},-\dfrac{1}{m+4}\right)$，

$\because x=\dfrac{m+2}{m+4}=\dfrac{(m+4)-2}{m+4}=1-\dfrac{2}{m+4}=1+2y$，即 $x-2y-1=0(y\neq 0)$．……………………10 分

因此，点 A 在直线 $x-2y-1=0$ 上.

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$\because DE=EB=AB=3BC=3$，$\therefore BC=1$．又 $\because AC=\sqrt{10}$，

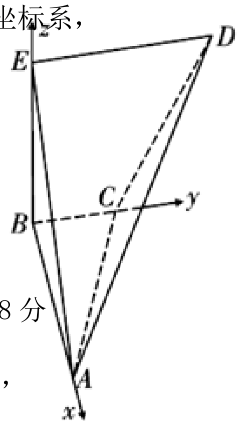
$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，$\therefore AB\perp BC$，……………………………1 分

又 $\because BE\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore BE\perp BC$，……………………………2 分

$\because AB\cap BE=B$，$\therefore BC\perp$ 平面 ABE，……………………………3 分

$\because DE//BC$，$\therefore DE\perp$ 平面 ABE．……………………………4 分

（Ⅱ）以点 B 为坐标原点，BA,BC,BE 所在直线分别为 x,y,z 轴轴建立空间直角坐标系，



则 $B(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,3,3)$，$E(0,0,3)$，……5 分

所以 $\overrightarrow{CA}=(3,-1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-3,3,3)$，$\overrightarrow{AE}=(-3,0,3)$．

设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{AM}=(-3\lambda,3\lambda,3\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AD}=(3-3\lambda,3\lambda-1,3\lambda)$，……………………………7 分

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CM}=-9+9\lambda+9\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，所以点 M 是 AD 的中点 ……8 分

（Ⅲ）设平面 BAD 的法向量为 $\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\because\overrightarrow{BD}=(0,3,3)$，$\overrightarrow{BA}=(3,0,0)$，

所以 $\begin{cases} \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=0, \\ \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{BA}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3y_1+3z_1=0, \\ 3x_1=0, \end{cases}$ 令 $y_1=1$，则 $\vec{n}_1=(0,1,-1)$．……………………………9 分

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，因为 $\overrightarrow{AD}=(-3,3,3)$，$\overrightarrow{ED}=(0,3,0)$，

所以 $\begin{cases} \vec{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=0 \\ \vec{n}_2\cdot\overrightarrow{ED}=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -3x_2+3y_2+3z_2=0, \\ 3y_2=0, \end{cases}$ 令 $x_2=1$，则 $\vec{n}_2=(1,0,1)$，……………10 分

所以 $\cos\left\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\right\rangle=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=-\dfrac{1}{2}$．……………………………11 分

由图知二面角 $B-AD-E$ 的平面角为锐角，所以二面角 $B-AD-E$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$．…12 分

19.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题意知，$\vec{m}\bullet\vec{n}=0$，即 $2\cos^2\frac{C}{2}-2\sin^2 C=0$， ……………………………1 分

$1+\cos C-2(1-\cos^2 C)=0$， ……………………………3 分

$2\cos^2 C+\cos C-1=0$，即 $\cos C=-1$，或 $\cos C=\frac{1}{2}$， ……………………………5 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=60°$． ……………………………6 分

（Ⅱ）$a^2=b^2+\frac{1}{2}c^2\Rightarrow a^2-b^2=\frac{1}{2}c^2$，

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{a}{2R}\bullet\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-\frac{b}{2R}\bullet\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ………………………10 分

$=\frac{2\left(a^2-b^2\right)}{4cR}=\frac{c^2}{4cR}=\frac{c}{4R}=\frac{1}{2}sinC=\frac{\sqrt{3}}{4}$. ……………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABFE$，$DE\subset$ 平面 ADE，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABFE=AE$，$DE\perp AE$，

则 $DE\perp$ 平面 $ABFE$，又 $AF\subset$ 平面 $ABFE$，则 $DE\perp AF$． ……………………………2 分

又正方形 $ABFE$ 中，$AF\perp BE$，且 $BE\cap DE=E$， ……………………………3 分

$BE,DE\subset$ 平面 BDE，则 $AF\perp$ 平面 BDE， ……………………………4 分

又 $BD\subset$ 平面 BDE，则 $AF\perp BD$． ……………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，DE，EA，EF 两两垂直，如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$，

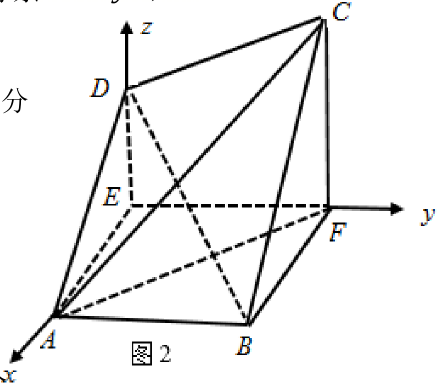


图 2

因为 $CF\|DE$，$CF\perp$ 平面 $ABFE$，

则 $A\left(2,0,0\right)$，$B\left(2,2,0\right)$，$C\left(0,2,2\right)$，$D\left(0,0,1\right)$， …………6 分

即 $\overrightarrow{AD}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$，

设平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+z=0\\ -2x+2y+2z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,-1,2)$， ……………………………9 分

设 $P\left(2,t,0\right)$ 且 $0\le t\le 2$，则 $\overrightarrow{CP}=(2,t-2,-2)$， ……………………………10 分

设直线 CP 与平面 ACD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{CP}\rangle|=\left|\frac{2+2-t-4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8+(t-2)^2}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{18}\Rightarrow t=1$ 或 $t=-\frac{3}{2}$（舍）……………………12 分

所以 $AP=1$.

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）(法一)：在 ΔABC 中，由正弦定理得 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$ …………………2 分

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)$

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin A\quad\because\sin A\neq 0\quad\therefore\cos B=\frac{1}{2}$ ……………………………4 分

$\because 0<B<\pi$，故 $B=\dfrac{\pi}{3}$． ……………………………5 分

（法二）在 ΔABC 中，由余弦定理得 $(2a-c)\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ……………2 分

$\therefore a^2+c^2-b^2=ac, \therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}, \because 0<B<\pi$， ……………………4 分

故 $B=\dfrac{\pi}{3}$． ……………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$B=\dfrac{\pi}{3}$ 且 $AB=AC$，ΔABC 为等边三角形，

设 $\angle D=\alpha$，则在 ΔABC 中，由余弦定理得 $AC^2=16+4-16\cos\alpha=20-16\cos\alpha$，………7 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times AC^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos\alpha, S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sin\alpha=4\sin\alpha$ ……………9 分

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $S=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos\alpha+4\sin\alpha=5\sqrt{3}+8\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{3})$ …………………11 分

$\because 0<\alpha<\pi, \therefore -\dfrac{\pi}{3}<\alpha-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$

所以当 $\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$S_{\max}=8+5\sqrt{3}$

所以当 $\angle D=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，四边形 $ABCD$ 的面积取得最大值 $8+5\sqrt{3}$． ……………………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：(1) 设 P 点坐标 (x,y)，则有点 M 坐标为 $\left(\dfrac{x}{2},y\right)$， ……………………………2 分

因为 M 在椭圆上，所以将点坐标代入椭圆，可得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$……………………………4 分

所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$

（Ⅱ）设 $G\left(x_1,y_1\right), H\left(x_2,y_2\right)\left(x_1\neq 0,x_2\neq 0\right)$，于是 $k_{AG}=\dfrac{y_1-2}{x_1}, k_{AH}=\dfrac{y_2-2}{x_2}$， …………5 分

$$k_{AG}\cdot k_{AH}=\frac{y_1-2}{x_1}\cdot\frac{y_2-2}{x_2}=\frac{k^2x_1x_2-\frac{4}{3}k\left(x_1+x_2\right)+\frac{16}{9}}{x_1x_2}$$ ……………………………7 分

直线与圆联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ y=kx+\dfrac{2}{3}\end{cases}$，于是有 $\left(1+k^2\right)x^2+\dfrac{4}{3}kx-\dfrac{32}{9}=0$，由此可得 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-\frac{4}{3}k}{1+k^2}\\ x_1x_2=\dfrac{-\frac{32}{9}}{1+k^2}\end{cases}$ …10 分

代入 $k_{AG}\cdot k_{AH}$ 中可得，$k_{AG}\cdot k_{AH}=\dfrac{k^2\cdot\dfrac{-\frac{32}{9}}{1+k^2}-\dfrac{4}{3}k\cdot\dfrac{-\frac{4}{3}k}{1+k^2}+\dfrac{16}{9}}{\dfrac{-\frac{32}{9}}{1+k^2}}=\dfrac{\frac{16}{9}}{-\frac{32}{9}}=-\dfrac{1}{2}$……………12 分