泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（十五）

命题人：饶真平　卢盛林　20210109

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 若函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-f'\left(1\right)x^2-x$，则 $f'\left(1\right)$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. -1

2. 设等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}:S_5=1:2$，则 $S_{15}:S_5$ 等于（　　）

A. $1:2$　　B. $1:3$　　C. $2:3$　　D. $3:4$

3. 已知曲线 $f\left(x\right)=a\ln x+x^2$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $x+y+b=0$，则 $ab=$（　　）

A. 3　　B. 5　　C. 6　　D. 8

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_2 a_n-1=\log_2 a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），若 $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=2^n$，则 $\log_2(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$ 的值是（　　）

A. $n-1$　　B. $n+1$　　C. $2n-1$　　D. $2n+1$

5. 若函数 $f\left(x\right)=kx-\ln x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递增，则 k 的取值范围是（　　）

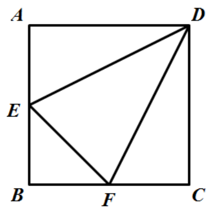
A. $[\dfrac{1}{2},+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]$

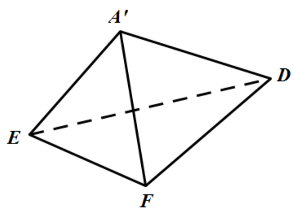
6. 两动直线 $y=kx+1$ 与 $y=-\dfrac{2}{k}x-1$ 的交点轨迹是（　　）

A. 椭圆的一部分　　B. 双曲线的一部分

C. 抛物线的一部分　　D. 圆的一部分

7. 如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别是 AB,BC 的中点，将 $\triangle ADE$、$\triangle EBF$、$\triangle FCD$ 分别沿 DE、EF、FD 折起，使得 A、B、C 三点重合于点 A'，若四面体 $A'EFD$ 的四个顶点在同一个球面上，则该球的表面积为（　　）





A. 5π　　B. 6π　　C. 8π　　D. 10π

8. 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在双曲线右支上且不与顶点重合，过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线的垂线，垂足为 A. 若 $\left|F_1A\right|=\sqrt{5}b$，则该双曲线离心率的取值范围为（　　）

A. $\left(1,\sqrt{2}\right)$　　B. $\left(\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\right)$　　C. $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}\right)$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 下列命题正确的是（　　）

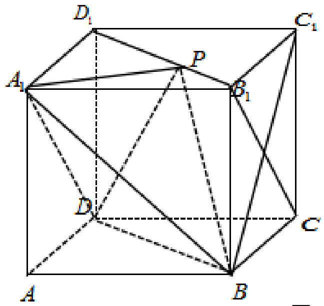
A. 若 $f'\left(x_0\right)=0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处无切线

B. 函数 $y=f(x)$ 的切线与函数的图象可以有两个公共点

C. 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x-y=0$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{f(1)-f(1+\Delta x)}{2\Delta x}=1$

D. 若函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=x^2-2$，且 $f(1)=2$，则 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $x+y-3=0$

10. 如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 B_1D_1 上一动点（包括端点），则以下结论正确的有（　　）



A. 三棱锥 $P-A_1BD$ 的体积为定值 $\frac{1}{3}$

B. 直线 PA_1 与平面 A_1BD 所成角的正弦值的范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

C. 过点 P 平行于平面 A_1BD 的平面被正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截得的多边形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 当点 P 与 B_1 重合时，三棱锥 $P-A_1BD$ 的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

11. 已知函数 $f(x)=-x^3+2x^2-x$，若过点 $P(1,t)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则 t 的取值可以是（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{27}$　　C. $\frac{1}{28}$　　D. $\frac{1}{29}$

12. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln x-2$，则下列说法正确的是（　　）

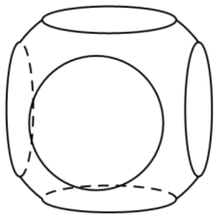
A. $f(x)$ 有且仅有一个极值点　　B. $f(x)$ 有零点

C. 若 $f(x)$ 的极小值点为 x_0，则 $0<f(x_0)<\frac{1}{2}$　　D. 若 $f(x)$ 的极小值点为 x_0，则 $\frac{1}{2}<f(x_0)<1$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $S_n=n^2+n+1$，$b_n=(-1)^n(a_n-2)(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_________；数列 $\{b_n\}$ 的前 50 项和为________.

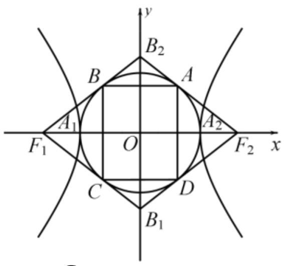
14. 某同学在参加《通用技术》实践课时，制作了一个实心工艺品（如图所示）．该工艺品可以看成一是个球体被一个棱长为 8 的正方体的 6 个面所截后剩余的部分（球心与正方体的中心重合）．若其中一个截面圆的周长为 6π，则该球的半径为__________；



现给出定义：球面被平面所截得的一部分叫做球冠．截得的圆叫做球冠的底，垂直于截面的直径被截得的一段叫做球冠的高．如果球面的半径是 R，球冠的高是 h，那么球冠的表面积计算公式是 $S=2\pi Rh$．由此可知，该实心工艺品的表面积是_________.

15. 已知函数 $f(x)=ax\ln x+\frac{1}{x}(a>0)$．当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的极小值为_______；若 $f(x)\geq ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围为__________.

16. 如图，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两顶点为 A_1,A_2，虚轴两端点为 B_1,B_2，两焦点为 F_1,F_2，若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$，切点分别为 A,B,C,D．则双曲线的离心率 $e=$________；菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的面积 S_1 与矩形 $ABCD$ 的面积 S_2 的比值 $\frac{S_1}{S_2}=$________.



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分．）

17.（本小题满分 10 分）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\dfrac{\cos C}{c}+\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}\sin A}$.

（Ⅰ）求c的值；

（Ⅱ）若$C=\dfrac{\pi}{3}$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

18.（本小题满分 12 分）已知两个定点$A(0,4),B(0,1)$，动点P满足$|PA|=2|PB|$.设动点P的轨迹为曲线E，直线$l:y=kx-4$.

（Ⅰ）求曲线E的轨迹方程；

（Ⅱ）若l与曲线E相切，求l的方程；

（Ⅲ）若l与曲线E交于不同的C,D两点，且$\angle COD=120^{\circ}$（O为坐标原点），求直线l的斜率；

19.（本小题满分 12 分）已知等差数列$\{a_n\}$满足公差$d>0$，前n项的和为S_n，$S_3=2a_4$，a_1，a_3+2，$2a_4$成等比数列.

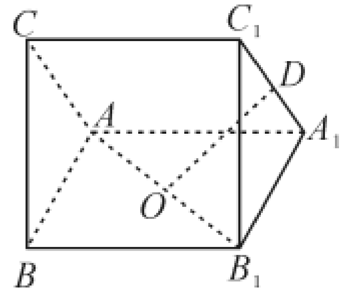
（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$b_n=\dfrac{(-1)^n(2n+5)}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$100$项的和$T_{100}$.

20.（本小题满分 12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，$AB\perp BB_1$，$BB_1=2$，O，D 分别为棱 AB_1，A_1C_1 的中点.

（Ⅰ）求证：$OD//$ 平面 BCC_1B_1；

（Ⅱ）若平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求直线 OD 与平面 AB_1C 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x-\dfrac{1}{2}\left(a\in\mathbf{R},a\neq 0\right)$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若对任意的 $x\in\left[1,+\infty\right)$，都有 $f\left(x\right)\geq 0$ 成立，求 a 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $\left(0,1\right)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程.

（Ⅱ）直线 $y=kx+m$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点.

①求 $|AB|$（用实数 k,m 表示）；

② O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，且 $\dfrac{|AB|}{|OA|}=\dfrac{3}{2}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（十五）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4.CDCA　5-8.CABB

8.【解析】F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，延长 F_2A 交 PF_1 于点 Q，

$\because PA$ 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线，$\therefore |PQ|=|PF_2|$，又$\because$ 点 P 在双曲线上，

$\therefore |PF_1|-|PF_2|=2a$，$|PF_1|-|PQ|=|QF_1|=2a$，

又$\because$ O 是的 F_1F_2 中点，A 是 F_2Q 的中点，$\therefore OA$ 是 $\triangle F_1F_2Q$ 的中位线，

$\therefore |QF_1|=2a=2|OA|$，即 $|OA|=a$，在 $\triangle F_1OA$ 中，$|OA|=a$，$|F_1A|=\sqrt{5}b$，$|OF_1|=c$，

由三角形两边之和大于第三边得：$a+c>\sqrt{5}b$，即 $(a+c)^2>5b^2$，即 $a^2+c^2+2ac>5(c^2-a^2)$，

两边同除以 a^2 并化简得：$2e^2-e-3<0$，解得：$-1<e<\frac{3}{2}$，又$\because e>1$，$\therefore 1<e<\frac{3}{2}$，

在 $\triangle F_1OA$ 中，由余弦定理可知，$\cos\angle AF_1O=\frac{|AF_1|^2+|F_1O|^2-|AO|^2}{2|AF_1|\cdot|F_1O|}=\frac{5b^2+c^2-a^2}{2\sqrt{5}bc}$，

在 $\triangle F_1AF_2$ 中，$\cos\angle AF_1O=\frac{|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}{2|AF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{5b^2+4c^2-|AF_2|^2}{4\sqrt{5}bc}$，

即 $\frac{5b^2+c^2-a^2}{2\sqrt{5}bc}=\frac{5b^2+4c^2-|AF_2|^2}{4\sqrt{5}bc}$，又$\because b^2=c^2-a^2$，得 $|AF_2|^2=7a^2-3c^2$，

又$\because$ $\angle OAF_2>\frac{\pi}{2}$，$\therefore |OA|^2+|AF_2|^2<|OC|^2$，即 $a^2+7a^2-3c^2<c^2$，$\therefore$ $e>\sqrt{2}$，即 $e\in\left(\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9.BD　10.BCD　11.CD　12.AC

12.【解析】由题意得，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，设 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，又 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$h(1)=e^1-1>0$，$\therefore h(x_0)$ 存在唯一零点 x_0，

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

$\therefore$ $f(x)$ 有唯一极小值点 x_0，故选项 A 正确.

令 $f'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，两边同时取对数可得 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}=-\ln x_0$.

$\therefore$ $f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2\geq 2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$（当且仅当 $x_0=1$ 时等号成立），

又 $\frac{1}{2}<x_0<1$，$\therefore$ $f(x_0)>0$，即 $[f(x)]_{\min}>0$，$\therefore$ $f(x)$ 无零点，故选项 B 错误.

由 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0-2, \frac{1}{2}<x_0<1$，可设 $g(x)=\frac{1}{x}+x-2$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+1$.

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减.

$\therefore g(1)<g(x)<g\left(\frac{1}{2}\right)$，即 $0<f(x_0)<\frac{1}{2}$，故选项 C 正确，选项 D 错误，

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. $a_n=\begin{cases}3 & n=1\\ 2n & n\geq 2\end{cases}$；49　14. 5；$94\pi$　15. 1；$(0,\frac{2}{e}]$　16. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；$\frac{\sqrt{5}+2}{2}$

16.【解析】直线 B_2F_1 的方程为 $bx-cy+bc=0$，所以 O 到直线的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+(-c)^2}}=a$，

所以 $(c^2-a^2)c^2=(2c^2-a^2)a^2$，所以 $c^4-3a^2c^2+a^4=0$，即 $e^4-3e^2+1=0$，

因为 $e>1$，解得 $e^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；

菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的面积 $S_1=2bc$，设矩形 $ABCD$，$BC=2m,BA=2n$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$，

因为 $m^2+n^2=a^2$，所以 $m=\frac{ac}{\sqrt{b^2+c^2}},n=\frac{ab}{\sqrt{b^2+c^2}}$，

所以矩形 $ABCD$ 的面积 $S_2=4mn=\frac{4a^2bc}{b^2+c^2}$，所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2bc}{\frac{4a^2bc}{b^2+c^2}}=\frac{b^2+c^2}{2a^2}=\frac{2c^2-a^2}{2a^2}=e^2-\frac{1}{2}$，

由 $e^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，所以 $\frac{S_1}{S_2}=e^2-\frac{1}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}+2}{2}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17. 解：（Ⅰ）因为 $\frac{\cos C}{c}+\frac{\cos A}{a}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}\sin A}$，所以 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}=\frac{b}{\sqrt{3}a}$，解得 $c=\sqrt{3}$；…5 分

（Ⅱ）因为 $C=\frac{\pi}{3}$，所以由正弦定理得 $\frac{ab}{\sin A\sin B}=\left(\frac{c}{\sin C}\right)^2=4$，

$$\therefore ab=4\sin A\sin B=4\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=4\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$$

$$=\sqrt{3}\sin 2A+1-\cos 2A=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+1,$$ ……………8 分

当 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$(ab)_{\max}=3$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\leq\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，…10 分

18. 解：（Ⅰ）设点 P 的坐标为 (x,y)，由 $|PA|=2|PB|$ 可得，$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=2\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，…… 2 分

整理可得 $x^2+y^2=4$，所以曲线 E 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$. …………… 4 分

（Ⅱ）依题意点 O 到直线 $l:kx-y-4=0$ 的距离 $\frac{4}{\sqrt{k^2+1}}=2$， …………… 6 分

解得 $k=\pm\sqrt{3}$，所以直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{3}x-4$. …………… 8 分

（Ⅲ）依题意，$OC=OD=2$，且 $\angle COD=120^\circ$，则点 O 到 CD 边的距离为1 …………… 10 分

即点 $O(0,0)$ 到直线 $l:kx-y-4=0$ 的距离 $\frac{4}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\pm\sqrt{15}$ …………… 12 分

所以直线 l 的斜率为 $\pm\sqrt{15}$.

19. 解：（Ⅰ）由条件得 $\begin{cases}S_3=2a_4\\ 2a_1a_4=(a_3+2)^2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3a_1+3d=2a_1+6d\\ 2a_1(a_1+3d)=(a_1+2d+2)^2\end{cases}$，得 $d=2$（舍负），$a_1=6$，

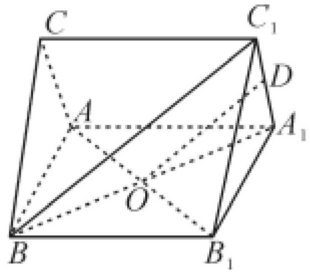
所以 $a_n=a_1+(n-1)d=6+2(n-1)=2n+4$； …………… 6 分

（Ⅱ）$b_n=\dfrac{(-1)^n(2n+5)}{a_na_{n+1}}=\dfrac{(-1)^n(2n+5)}{4(n+2)(n+3)}=\dfrac{(-1)^n}{4}\left(\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}\right)$， …………… 9 分

所以$T_{100}=\dfrac{1}{4}\left[-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\right)+\cdots-\left(\dfrac{1}{101}+\dfrac{1}{102}\right)+\left(\dfrac{1}{102}+\dfrac{1}{103}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{103}\right)=-\dfrac{25}{309}$. …………… 12 分

20. 解：（Ⅰ）连接A_1B，则A_1B与AB_1交于点O. 如图所示，连接BC_1.



显然四边形ABB_1A_1为矩形，O，D分别为棱A_1B，A_1C_1的中点，

所以OD为$\triangle A_1BC_1$的中位线. 所以$OD//BC_1$. …………… 2 分

而$OD\not\subset$平面BCC_1B_1，$BC_1\subset$平面BCC_1B_1，

所以$OD//$平面BCC_1B_1. …………… 4 分

（Ⅱ）若平面$ABC\perp$平面ABB_1A_1，如图，取AB的中点P，

因为$\triangle ABC$是正三角形，所以$CP\perp AB$.

因为平面$ABC\cap$平面$ABB_1A_1=AB$，$CP\subset$平面ABC，所以$CP\perp$平面ABB_1A_1，

所以$CP\perp PB$，$CP\perp PO$. 显然$PB\perp PO$，…………… 6 分

故以PB，PO，PC所在的直线分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，

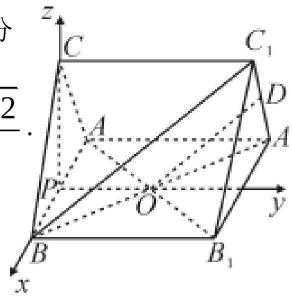
因为$\triangle ABC$是边长为 2 的正三角形，$AB\perp BB_1$，$BB_1=2$，

所以$A(-1,0,0)$，$B_1(1,2,0)$，$C\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$O(0,1,0)$，$A_1(-1,2,0)$，$D\left(-\dfrac{1}{2},2,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………7 分

则$\overrightarrow{AB_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(-\dfrac{1}{2},1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面AB_1C的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=(x,y,z)\cdot(2,2,0)=2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(x,y,z)\cdot(1,0,\sqrt{3})=x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令$x=3$，得平面AB_1C的一个法向量为$\vec{n}=\left(3,-3,-\sqrt{3}\right)$；………10 分



设直线OD与平面AB_1C所成角的大小为θ，则$\sin\theta=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OD}}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

故直线OD与平面ABC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ……………12 分

21. 解：（Ⅰ）$a=3$时，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3\ln x-\dfrac{1}{2}$，$f(1)=0$ $f'(x)=x-\dfrac{3}{x}$，$f'(1)=-2$

$\therefore y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-2x+2$…………… 3 分

（Ⅱ）$f'(x)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}(x>0)$

①当$a<0$时，$f'(x)=\dfrac{x^2-a}{x}>0$恒成立，函数$f(x)$的递增区间为$(0,+\infty)$…………… 5 分

②当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\sqrt{a}$或$x=-\sqrt{a}$

所以函数$f(x)$的递增区间为$\left(\sqrt{a},+\infty\right)$，递减区间为$\left(0,\sqrt{a}\right)$ …………… 7 分

（Ⅲ）对任意的$x\in[1,+\infty)$，使$f(x)\geq 0$成立，只需任意的$x\in[1,+\infty)$，$f(x)_{\min}\geq 0$

①当$a<0$时，$f(x)$在$[1,+\infty)$上递增，所以$f(x)\geq f(1)=\dfrac{1}{2}-a\ln 1-\dfrac{1}{2}=0$（成立）…8 分

②当$0<a\le 1$时，$0<\sqrt{a}\le 1$，$f\left(x\right)$在$\left[1,+\infty\right)$上是增函数，所以只需$f\left(1\right)\ge 0$

而$f\left(1\right)=\frac{1}{2}-a\ln 1-\frac{1}{2}=0$，所以$0<a\le 1$满足题意； ……………9 分

③当$a>1$时，$\sqrt{a}>1$，$f\left(x\right)$在$\left[1,\sqrt{a}\right]$上是减函数，$\left[\sqrt{a},+\infty\right)$上是增函数，

所以只需$f\left(\sqrt{a}\right)\ge 0$即可，而$f\left(\sqrt{a}\right)<f\left(1\right)=0$，从而$a>1$不满足题意；…………… 11 分

综合①②③实数a的取值范围为$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right]$.

22. 解：（Ⅰ）$\because C$过$\left(0,1\right)$，$\therefore b=1$，又$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$且$a^2=b^2+c^2$，解得$a=2$，$\therefore\ C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ⋯ 3 分

（Ⅱ）①联立$y=kx+m$与$x^2+4y^2=4$，得$x^2+4\left(kx+m\right)^2=4$，$\therefore\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\therefore\Delta=(8km)^2-4\left(4k^2+1\right)\left(4m^2-4\right)=16\left(4k^2+1-m^2\right)>0$，$\therefore 4k^2+1>m^2$，

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则$x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{-8km}{4k^2+1})^2-4\cdot\frac{4m^2-4}{4k^2+1}}=\frac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}$； …………… 7 分

②$\because\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\therefore OA\perp AB$，则$k\ne 0$，直线$OA$为：$y=-\frac{1}{k}x$.

联立$y=kx+m$，得$y=k\left(-ky\right)+m$，$\therefore y_1=\frac{m}{k^2+1}$，$x_1=-ky_1=\frac{-km}{k^2+1}$，代入$x_1^2+4y_1^2=4$，

$\therefore\left(\frac{-km}{k^2+1}\right)^2+4\left(\frac{m}{k^2+1}\right)^2=4$，$\therefore m^2=\frac{4\left(k^2+1\right)^2}{k^2+4}$，

$\therefore 4k^2+1-m^2=4k^2+1-\frac{4\left(k^2+1\right)^2}{k^2+4}=\frac{\left(4k^2+1\right)\left(k^2+4\right)-4\left(k^2+1\right)^2}{k^2+4}=\frac{9k^2}{k^2+4}$

$\therefore|AB|^2=\frac{16\left(1+k^2\right)\left(4k^2+1-m^2\right)}{\left(4k^2+1\right)^2}=\frac{144\left(1+k^2\right)k^2}{\left(4k^2+1\right)^2\left(k^2+4\right)}$

又$\because|OA|^2=\left(-ky_1\right)^2+y_1^2=\left(k^2+1\right)\left(\frac{m}{k^2+1}\right)^2=\frac{m^2}{k^2+1}=\frac{4\left(k^2+1\right)}{k^2+4}$

$\therefore\frac{|AB|^2}{|OA|^2}=\frac{36k^2}{\left(4k^2+1\right)^2}=\frac{9}{4}$，得$16k^2=\left(4k^2+1\right)^2$，$\therefore\left(4k^2-1\right)^2=0$，$\therefore k^2=\frac{1}{4}$.

此时$m^2=\frac{4\left(k^2+1\right)^2}{k^2+4}=\frac{25}{17}<4k^2+1=2$，$\therefore\Delta>0$成立.

由$|OA|^2=\frac{4\left(k^2+1\right)}{k^2+4}=\frac{20}{17}$，

$\therefore\triangle OAB$的面积$S=\frac{1}{2}|OA||AB|=\frac{1}{2}|OA|\times\frac{3}{2}|OA|=\frac{3}{4}|OA|^2=\frac{15}{17}$. …………… 12 分