

# 泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（十四）

命题人：杨小郎 陈智伟 20201231

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 直线  $x+2ay-2=0$  与  $(a-1)x-ay+3=0$  平行，则  $a$  的值为（ ）  
 A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$  或 0                      C.  $\frac{1}{2}$                       D. 0
2. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = 2^n - 1$ ，则  $\frac{1}{a_3 - a_1} + \frac{1}{a_4 - a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n+2} - a_n} =$ （ ）  
 A.  $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$     B.  $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$     C.  $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$     D.  $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$
3. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，已知  $S_{12} > 0$ ， $S_{13} < 0$ ，则当  $n$  为多少时前  $n$  项和有最大值（ ）  
 A. 6                      B. 5                      C. 6 或 7                      D. 7
4. 已知各项为正的等比数列  $\{a_n\}$  中， $a_4$  与  $a_{14}$  的等比中项为  $2\sqrt{2}$ ，则  $2a_7 + a_{11}$  的最小值为（ ）  
 A. 16                      B. 8                      C.  $2\sqrt{2}$                       D. 4
5. 数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 0$ ， $a_n + a_{n+1} = 2n$ ，则  $a_{2020} =$ （ ）  
 A. 2019                      B. 2020                      C. 4039                      D. 4040
6. 已知函数  $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ ，其中  $f'(x)$  为函数  $f(x)$  的导数，  
 则  $f(2020) + f(-2020) + f'(2019) - f'(-2019) =$ （ ）  
 A. 0                      B. 2                      C. 2019                      D. 2020
7. 已知  $S_n$  是等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若存在  $m \in \mathbf{N}^*$ ，满足  $\frac{S_{2m}}{S_m} = 9$ ， $\frac{a_{2m}}{a_m} = \frac{5m+1}{m-1}$ ，则  $m$  的值为（ ）  
 A. -2                      B. 2                      C. -3                      D. 3
8. 已知点  $A$  是抛物线  $x^2 = 4y$  的对称轴与准线的交点，点  $F$  为抛物线的焦点，点  $P$  在抛物线上且满足  $|PA| = m|PF|$ ，若  $m$  取最大值时，点  $P$  恰好在以  $A, F$  为焦点的双曲线上，则双曲线的离心率为（ ）  
 A.  $\sqrt{3} + 1$                       B.  $\sqrt{2} + 1$                       C.  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，关于数列  $\{a_n\}$ ，下列四个命题中正确的是（ ）  
 A. 若  $a_{n+1} = a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则  $\{a_n\}$  既是等差数列又是等比数列  
 B. 若  $S_n = An^2 + Bn (A, B \text{ 为常数}, n \in \mathbf{N}^*)$ ，则  $\{a_n\}$  是等差数列  
 C. 若  $S_n = 1 - (-1)^n$ ，则  $\{a_n\}$  是等比数列  
 D. 若  $\{a_n\}$  是等差数列，则  $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$  也成等差数列

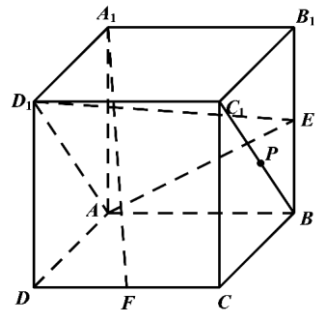
10. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ，直线  $l$  的斜率为  $\sqrt{3}$  且经过点  $F$ ，直线  $l$  与抛物线  $C$  交于点  $A$ ， $B$  两点（点  $A$  在第一象限）、与抛物线的准线交于点  $D$ ，若  $|AF| = 4$ ，则以下结论正确的是（ ）

- A.  $p = 2$       B.  $F$  为  $AD$  中点      C.  $|BD| = 2|BF|$       D.  $|BF| = 2$

11. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = 4$ ， $E, F$  分别为  $BB_1, CD$  的中点，

$P$  是  $BC_1$  上的动点，则（ ）

- A.  $A_1F \perp$  平面  $AD_1E$   
 B. 平面  $AD_1E$  截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的截面面积为 18  
 C. 三棱锥  $P - AD_1E$  的体积与  $P$  点的位置有关  
 D. 过  $AE$  作正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的外接球的截面，所得截面圆的面积的最小值  $5\pi$



12. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，前  $n$  项积为  $T_n$ ，且  $\frac{1}{e^{a_3} + 1} + \frac{1}{e^{a_{2019}} + 1} \leq 1$ ，则（ ）

- A. 当数列  $\{a_n\}$  为等差数列时， $S_{2021} \geq 0$       B. 当数列  $\{a_n\}$  为等差数列时， $S_{2021} \leq 0$   
 C. 当数列  $\{a_n\}$  为等比数列时， $T_{2021} > 0$       D. 当数列  $\{a_n\}$  为等比数列时， $T_{2021} < 0$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分。）

13. 已知直线  $l: mx + y - 1 = 0$ ，圆  $C: x^2 + y^2 = n (m, n \in \mathbf{R})$ ，则直线  $l$  过定点\_\_\_\_\_；

若直线  $l$  与圆  $C$  恒有公共点，则  $n$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 已知公差为  $d$  的等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $a_1 > 0$ ， $a_4, a_5$  是方程  $x^2 - mx - 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$  的两实数根，则当  $n =$ \_\_\_\_\_时， $S_n$  最大； $d$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知椭圆  $C: \frac{y^2}{m} + \frac{x^2}{m-4} = 1 (m > 4)$ ，点  $A(-2, 2)$  是椭圆内一点， $B(0, -2)$ ，若椭圆上存在一点  $P$ ，使得  $|PA| + |PB| = 8$ ，则  $m$  的范围是\_\_\_\_\_；当  $m$  取得最大值时，椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.

16. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，已知  $a_1 = 0$ ， $S_n = a_{n+1} - 2$ ，则  $S_n =$ \_\_\_\_\_；

若  $\frac{S_{n+1}}{S_{2n}} < \frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$ ，则  $n$  的最小值是\_\_\_\_\_.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分。）

17.（本小题满分 10 分）已知  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，函数  $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$  的导函数为  $f'(x)$ 。

（I）若  $b = c$ ，求曲线  $y = f(x)$  在点  $(b, f(b))$  处的切线方程；

（II）求  $\frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(b)} + \frac{1}{f'(c)}$  的值。

18.（本小题满分 12 分）已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足  $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n - 2a_n \cdot a_{n+1} = 0$ ，且  $a_1 = 1$ ， $b_1 = 1$ ，

设  $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ 。

（I）求数列  $\{c_n\}$  的通项公式；

（II）若  $\{a_n\}$  是等比数列，且  $a_2 = 3$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ 。

19.（本小题满分 12 分）如图，正三角形  $ABE$  与菱形  $ABCD$  所在的平面互相垂直， $AB = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

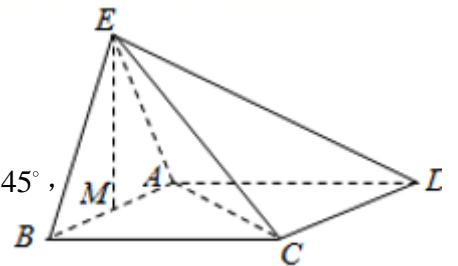
$M$  是  $AB$  的中点。

（I）求证： $EM \perp AD$ ；

（II）求二面角  $A-BE-C$  的余弦值；

（III）在线段  $EC$  上是否存在点  $P$ ，使得直线  $AP$  与平面  $ABE$  所成的角为  $45^\circ$ ，

若存在，求出  $\frac{EP}{EC}$  的值；若不存在，说明理由。



20. (本小题满分 12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $(a_{n+1} + 1)(a_n + 1) = 2a_n + 1$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

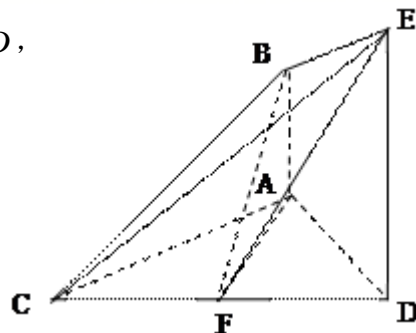
(II) 证明: 对  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \cdots + a_n a_{n+1} a_{n+2} < \frac{1}{12}$ .

21. (本小题满分 12 分) 如图, 已知  $AB \perp$  平面  $ACD$ ,  $DE \perp$  平面  $ACD$ ,

$AB = 2$ ,  $AC = AD = DE = 4$ ,  $F$  为  $CD$  的中点.

(I) 求证:  $AF \parallel$  平面  $BCE$ ;

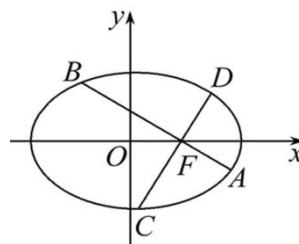
(II) 若  $\angle CAD = 60^\circ$ , 求二面角  $F - BE - D$  的余弦值.



22. (本小题满分 12 分) 如图, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 过椭圆右焦点  $F$  作两条互相垂直的弦  $AB$  与  $CD$ . 当直线  $AB$  的斜率为 0 时,  $|AB| = 4$ .

(I) 求椭圆的方程;

(II) 求使  $|AB| + |CD|$  取最小值时直线  $AB$  的方程.



# 泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（十四）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4. BAAB    5-8. BBDB

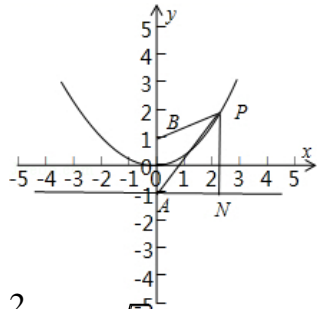
8. 【解析】过  $P$  作准线的垂线，垂足为  $N$ ，则由抛物线的定义可得  $|PN| = |PB|$ ，

$$\therefore |PA| = m|PN|, \quad \therefore \frac{1}{m} = \frac{|PN|}{|PA|}, \quad \text{设 } PA \text{ 的倾斜角为 } \alpha, \quad \text{则 } \sin \alpha = \frac{1}{m},$$

当  $m$  取得最大值时， $\sin \alpha$  最小，此时直线  $PA$  与抛物线相切，

$\therefore P(2,1)$ （利用导数来解决），

$$\therefore \text{双曲线的实轴长为 } |PA| - |PB| = 2(\sqrt{2} - 1), \quad \therefore \text{双曲线的离心率为 } \frac{2}{2(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} + 1.$$



二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. BCD    10. ABC    11. AB    12. AC

12. 【解析】由  $\frac{1}{e^{a_3} + 1} + \frac{1}{e^{a_{2019}} + 1} \leq 1$ ，可得  $\frac{1}{e^{a_3} + 1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{a_{2019}} + 1} - \frac{1}{2} \leq 0$ ，

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2}, \quad f(-x) + f(x) = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} - 1 = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 = 0,$$

所以  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2}$  是奇函数，且在  $\mathbf{R}$  上单调递减，所以  $a_3 + a_{2019} \geq 0$ ，

所以当数列  $\{a_n\}$  为等差数列时， $S_{2021} = \frac{2021(a_3 + a_{2019})}{2} \geq 0$ ；

当数列  $\{a_n\}$  为等比数列时，且  $a_3, a_{1011}, a_{2019}$  同号，所以  $a_3, a_{1011}, a_{2019}$  均大于零，

$$\text{故 } T_{2021} = (a_{1011})^{2021} > 0.$$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13.  $(0,1)$ ;  $[1, +\infty)$     14.  $4$ ;  $(-\infty, -2]$     15.  $(6 + 2\sqrt{5})$ ;  $\frac{2}{5}$     16.  $2^n - 2$ ;  $4$

15. 【解析】因为点  $A(-2,2)$  是椭圆内一点，故  $\frac{4}{m} + \frac{4}{m-4} < 1$ ，由  $\begin{cases} \frac{4}{m} + \frac{4}{m-4} < 1 \\ m > 4 \end{cases}$  可得  $m > 6 + 2\sqrt{5}$ .

$B(0,-2)$  为椭圆的下焦点，设椭圆的上焦点为  $F$ ，则  $|PA| + |PB| = 2\sqrt{m} + |PA| - |PF|$ ，

而  $||PA| - |PF|| \leq |AF| = 2$ ，当且仅当  $P, A, F$  三点共线时等号成立，

故  $2\sqrt{m} - 2 \leq |PA| + |PB| \leq 2\sqrt{m} + 2$ ，所以  $2\sqrt{m} - 2 \leq 8 \leq 2\sqrt{m} + 2$ ，所以  $9 \leq m \leq 25$ ，

故  $6 + 2\sqrt{5} < m \leq 25$ .  $m$  的最大值为 25，此时椭圆  $C: \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{21} = 1$ ，故其离心率为  $\frac{\sqrt{25-21}}{5} = \frac{2}{5}$ ，

16. 【解析】 $\because S_n + 2 = a_{n+1} = S_{n+1} - S_n, \therefore S_{n+1} = 2S_n + 2, \therefore S_{n+1} + 2 = 2(S_n + 2)$ ，

$\therefore \{S_n + 2\}$  是等比数列且  $q = 2$ ，又  $S_1 + 2 = a_1 + 2 = 2, \therefore S_n + 2 = 2^n, \therefore S_n = 2^n - 2$ ，

$\therefore$  当  $n \geq 2$  时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}$ ，则有  $\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}} = \frac{1}{8}$ ，又  $\because \frac{S_{n+1}}{S_{2n}} < \frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}, \therefore \frac{2^{n+1} - 2}{2^{2n} - 2} < \frac{1}{8}$ ，

化简得  $2^{2n} - 16 \cdot 2^n + 14 > 0$ ，解得  $2^n > 8 + 5\sqrt{2}$  或  $2^n < 8 - 5\sqrt{2}$ ，

$\therefore n \in \mathbf{N}^*$ ，所以  $2^n > 8 + 5\sqrt{2}$ ，则  $n_{\min} = 4$ 。

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17. 解：（I）若  $b=c$ ，则  $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ ，所以  $f'(x)=(x-b)^2+(x-a)\cdot 2(x-b)$ ，……………2 分  
 则  $f'(b)=(b-b)^2+(x-a)\cdot 2(b-b)=0$ ，即曲线  $y=f(x)$  在点  $(b, f(b))$  处的切线斜率为 0，  
 又  $f(b)=(b-a)(b-b)^2=0$ ，所以所求切线方程为： $y=0$ ；……………5 分

（II）由  $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$  得  
 $f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)[(x-b)(x-c)]'=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$  ……1 分  
 所以  $f'(a)=(a-b)(a-c)$ ， $f'(b)=(b-a)(b-c)$ ， $f'(c)=(c-a)(c-b)$  ……8 分  
 因此  $\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$   
 $=\frac{1}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}\right)+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{b-a}{(a-c)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$   
 $=-\frac{1}{(a-c)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}=0$ 。……………10 分

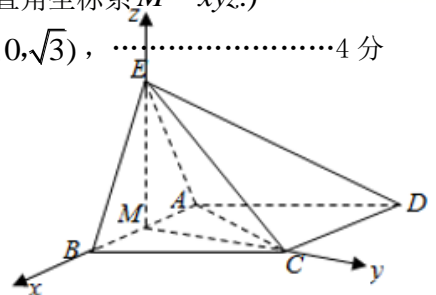
18. 解：（I）依题意，由  $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n - 2a_n \cdot a_{n+1} = 0$ ，可得  $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n = 2a_n \cdot a_{n+1}$ ，  
 两边同时乘以  $\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ ，可得  $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n} = 2$ ，即  $c_{n+1} - c_n = 2$ ，因为  $c_1 = \frac{b_1}{a_1} = 1$ ，……………3 分  
 所以数列  $\{c_n\}$  是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，  
 所以  $c_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。……………6 分

（II）由题意，设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，则  $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$ ，故  $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。  
 由（I）知， $c_n = 2n-1$ ，且  $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ ，则  $b_n = c_n \cdot a_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1}$ ，……………7 分  
 所以  $S_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + \dots + (2n-1) \times 3^{n-1}$  ①，  
 $3S_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + (2n-1) \times 3^n$  ②，……………8 分  
 ①-②得： $-2S_n = 1 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \dots + 2 \times 3^{n-1} - (2n-1)3^n$  ……9 分  
 $= 1 + \frac{2 \times 3 - 2 \times 3^{n-1} \times 3}{1-3} - (2n-1) \times 3^n = -2 - (2n-2) \times 3^n$ ，……………11 分  
 所以  $S_n = (n-1) \times 3^n + 1$ 。……………12 分

19. 解：（I） $\because EA=EB$ ， $M$  是  $AB$  的中点， $\therefore EM \perp AB$ ，……………1 分  
 $\because$  平面  $ABE \perp$  平面  $ABCD$ ，平面  $ABE \cap$  平面  $ABCD = AB$ ， $EA \subset$  平面  $ABE$ ，  
 $\therefore EM \perp$  平面  $ABCD$ ，……………2 分  
 又  $AD \subset$  平面  $ABCD$ ， $\therefore EM \perp AD$ 。……………3 分

（II） $\because EM \perp$  平面  $ABCD$ ， $\therefore EM \perp MC$ ， $\because \triangle ABC$  是正三角形，  
 $\therefore MC \perp AB$ 。 $\therefore MB, MC, ME$  两两垂直，建立如图所示空间直角坐标系  $M-xyz$ 。  
 则  $M(0,0,0)$ ， $A(-1,0,0)$ ， $B(1,0,0)$ ， $C(0,\sqrt{3},0)$ ， $E(0,0,\sqrt{3})$ ，……………4 分  
 $\overline{BC} = (-1,\sqrt{3},0)$ ， $\overline{BE} = (-1,0,\sqrt{3})$ ，

设  $\vec{m} = (x, y, z)$  是平面  $BCE$  的一个法向量，



则  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BC} = -x + \sqrt{3}y = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BE} = -x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$ , 令  $z=1$ , 得  $\vec{m} = (\sqrt{3}, 1, 1)$ , .....6分

$\therefore y$ 轴与平面  $ABE$  垂直,  $\therefore \vec{n} = (0, 1, 0)$  是平面  $ABE$  的一个法向量.....7分

所以  $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times 1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$  即二面角  $A-BE-C$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . .....8分

(III) 假设在线段  $CE$  上存在点  $P$ , 使得直线  $PA$  与平面  $ABE$  所成的角为  $45^\circ$ .

$\vec{AE} = (1, 0, \sqrt{3}), \vec{EC} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ , 设  $\vec{EP} = \lambda \vec{EC} = (0, \sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3}\lambda)$ , ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ),

则  $\vec{AP} = \vec{AE} + \vec{EP} = (1, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$ , .....9分

$\therefore$  直线  $PA$  与平面  $ABE$  所成的角为  $45^\circ$ ,

$\therefore \sin 45^\circ = \left| \cos \langle \vec{AP}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{1+3\lambda^2+3-6\lambda+3\lambda^2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , .....10分

由  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 解得  $\lambda = \frac{2}{3}$ , .....12分

$\therefore$  在线段  $EC$  上存在点  $P$ , 使得直线  $PA$  与平面  $ABE$  所成的角为  $45^\circ$ , 且  $\frac{EP}{EC} = \frac{2}{3}$ .

20. 解: (I) 由  $(a_{n+1} + 1)(a_n + 1) = 2a_n + 1$  可得  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ , .....2分

$\therefore a_1 = \frac{1}{2} > 0, \therefore a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} > 0$ , 依此类推  $a_n > 0$

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 1, \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$ , .....4分

$\therefore$  数列  $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$  是首项为 2, 公差为 1 的等差数列,  $\therefore \frac{1}{a_n} = n+1$ , 即  $a_n = \frac{1}{n+1}$ , .....6分

(II)  $a_n = \frac{1}{n+1}$ , 故 对  $k=1, 2, 3, \dots$

$a_k a_{k+1} a_{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right]$ , .....8分

$\therefore a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_n a_{n+1} a_{n+2}$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \left( \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} \right) + \dots + \left( \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right) \right]$  .....10分  
 $= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] < \frac{1}{12}$ . .....12分

21. 解: (I) 如图 (1), 取  $DE$  的中点  $M$ , 连接  $AM, FM$ ,

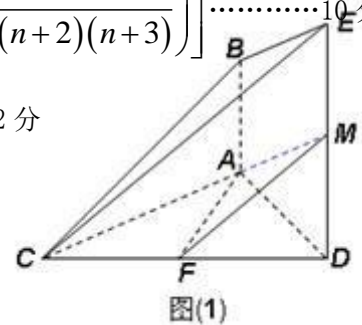
$\therefore AB \perp$  平面  $ACD, DE \perp$  平面  $ACD, \therefore AB \parallel DE$ .

$\therefore AB = EM = \frac{1}{2} DE, \therefore$  四边形  $ABEM$ ,  $\therefore AM \parallel BE$ ,

又  $\therefore AM \not\subset$  平面  $BCE, BE \subset$  平面  $BCE, \therefore AM \parallel$  平面  $BCE$ .

$\therefore CF = FD, DM = ME, \therefore ME \parallel CE$ , 又  $\therefore MF \not\subset$  平面  $BCE, CE \subset$  平面  $BCE$ ,

$\therefore MF \parallel$  平面  $BCE$ , 又  $\therefore AM \cap MF = M, \therefore$  平面  $AMF \parallel$  平面  $BCE$ ,



$\because AF \subset \text{平面 } AMF, \therefore AF \parallel \text{平面 } BCE$  .....5分

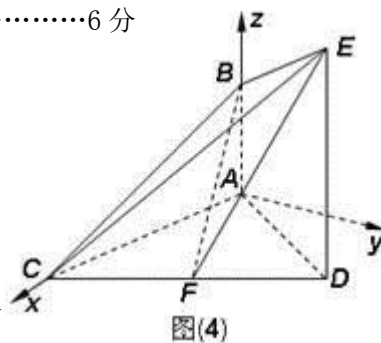
(II) 以  $A$  为原点, 分别以  $AC, AB$  为  $x$  轴、 $z$  轴的正方向建立空间直角坐标系  $A-xyz$ , 如图(4), 则  $A(0,0,0), B(0,0,2), F(3,\sqrt{3},0)$ , .....6分

于是有  $\overrightarrow{AB} = (0,0,2), \overrightarrow{BE} = (2,2\sqrt{3},2), \overrightarrow{BF} = (3,\sqrt{3},-2)$ ,

设平面  $BEF$  的一个法向量为  $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} 2x_1 + 2\sqrt{3}y_1 + 2z_1 = 0 \\ 3x_1 + \sqrt{3}y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}$$

取  $y_1 = \sqrt{3}$ , 可得  $\vec{n}_1 = (-\frac{9}{5}, \sqrt{3}, -\frac{6}{5})$  .....8分



设平面  $ABED$  的一个法向量为  $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} 2z_2 = 0 \\ 2x_2 + 2\sqrt{3}y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y_2 = \sqrt{3} \text{ 可得, } \vec{n}_2 = (-3, \sqrt{3}, 0), \text{ .....10分}$$

$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{7}{8}$  即所求的二面角  $F-BE-D$  的余弦值为  $\frac{7}{8}$ . .....12分

22. 解: (I) 由题意知  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, 2a = 4$ , 又  $a^2 = b^2 + c^2$ , 解得  $a = 2, b = \sqrt{3}$ ,

所以椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ; .....4分

(II) ①当两条弦中一条弦所在直线的斜率为0时, 另一条弦所在直线的斜率不存在时,

由题意知  $|AB| + |CD| = 7$ , 不满足条件; .....5分

②当两弦所在直线的斜率均存在且不为0时, 设直线  $AB$  的方程为  $y = k(x-1)$ ,

则直线  $CD$  的方程为  $y = -\frac{1}{k}(x-1)$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

将直线  $AB$  的方程代入椭圆方程中并整理得  $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ , .....6分

则  $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$ , .....7分

所以  $|AB| = \sqrt{k^2+1}|x_1-x_2| = \sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$ , .....8分

同理,  $|CD| = \frac{12\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}{3+\frac{4}{k^2}} = \frac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$ , .....9分

所以  $|AB| + |CD| = \frac{12(k^2+1)}{3+4k^2} + \frac{12(k^2+1)}{3k^2+4} = \frac{84(k^2+1)^2}{(3+4k^2)(3k^2+4)}$  .....10分

$$\geq \frac{84(k^2+1)^2}{\left(\frac{3+4k^2+3k^2+4}{2}\right)^2} = \frac{48}{7},$$

当且仅当  $3+4k^2 = 3k^2+4$  即  $k = \pm 1$  时, 上式取等号, .....8分

所以直线  $AB$  的方程为  $x-y-1=0$  或  $x+y-1=0$ . .....12分