泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（十六）

命题人：林景芳　赖呈杰　20210116

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 设空间两个不同的单位向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,0)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,0)$ 与向量 $\vec{c}=(1,1,1)$ 的夹角都等于 $\frac{\pi}{4}$，则 $<\vec{a},\vec{b}>$ 的大小为（　　）

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

2. 过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右顶点作 x 轴的垂线与 C 的一条渐近线相交于点 A，若以 C 的右焦点为圆心，以 2 为半径的圆经过 A、O 两点（O 为坐标原点），则双曲线 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

3. 短轴长为 $4\sqrt{5}$，离心率为 $\frac{2}{3}$ 的椭圆的两个焦点分别为 F_1,F_2，过焦点 F_1 的弦为 AB，则三角形 $\triangle ABF_2$ 的周长为（　　）

A. $12\sqrt{5}$　　B. 24　　C. $24\sqrt{2}$　　D. $18\sqrt{3}$

4. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在双曲线 C 上，且 $|PF_1|+|PF_2|=3b$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　D. $\sqrt{21}$

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2a_4=a_3+2$，又 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_5=$（　　）

A. $\frac{31}{2}$ 或 $\frac{11}{2}$　　B. $\frac{31}{2}$　　C. 15　　D. 6

6. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点为 F. 短轴的一个端点为 M，直线 $l:3x-4y=0$ 交椭圆 E 于 A,B 两点. 若 $|AF|+|BF|=4$，点 M 到直线的距离不小于 $\frac{4}{5}$，则椭圆 E 的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$

7. 已知椭圆 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 G 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　　C. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

8. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过焦点 F 的直线与抛物线交于点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值为（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 下列条件中，使点 P 与 A,B,C 三点一定共面的是（　　）

A. $\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$　　B. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

10. 在平面直角坐标系中，有两个圆 $C_1:\left(x+2\right)^2+y^2=1$ 和 $C_2:\left(x-2\right)^2+y^2=r^2$，其中常数 r 满足 $1\le r\le 2$，一个动圆 P 与两圆都相切，则动圆圆心的轨迹可以是（　　）

A. 两个椭圆　　B. 两个双曲线

C. 一个双曲线和一条直线　　D. 一个椭圆和一个双曲线

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E,F,G 分别是 AB,BC,B_1C_1 的中点. 下列命题正确的是（　　）

A. 以正方体的顶点为顶点的三棱锥的四个面最多只有三个面是直角三角形

B. P 在直线 FG 上运动时，$AP\perp DE$

C. Q 在直线 BC_1 上运动时，三棱锥 $A-D_1QC$ 的体积不变

D. M 是正方体的面 $A_1B_1C_1D_1$ 内到点 D 和 C_1 距离相等的点，则 M 点的轨迹是一条线段

12. 下列说法正确的是（　　）

A. 直线 $(3+m)x+4y-3+3m=0(m\in\mathbf{R})$ 恒过定点 $(-3,-3)$

B. 圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有 3 个点到直线 $l:x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离等于 1

C. 若圆 $C_1:x^2+y^2+2x=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-4x-8y+m=0(m<20)$ 恰有三条公切线，则 $m=4$

D. 若已知圆 $C:x^2+y^2=4$，点 P 为直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 上一动点（点 P 在圆 C 外），过点 P 向圆 C 引两条切线 PA,PB，其中 A,B 为切点，则直线 AB 经过定点 $(1,2)$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

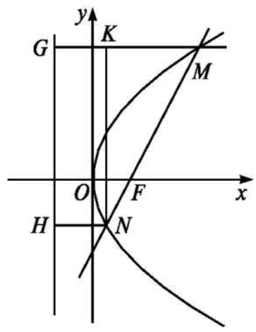
13. 以下四个命题，其中正确命题的序号是__________.

①平面内与一定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹是抛物线；

②抛物线 $y=ax^2$ 的焦点到原点的距离是 $\frac{|a|}{4}$；

③直线 l 与抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 交于两点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $|AB|=x_1+x_2+p$；

④正三角形的一个顶点在坐标原点，另外两个顶点在抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 上，则此正三角形边长为 $4\sqrt{3}p$.



14. 已知 M,N 是过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 的交点，O 是坐标原点，且满足 $\overrightarrow{MF}=3\overrightarrow{FN}$，$S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}|MN|$，则 p 的值为________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$，$\cdots$，设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，那么数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为____________.

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+n$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$___________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分．）

17.（本小题满分 10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(x-1)^2+y^2=4$，M 点的坐标为 $(3,-3)$．

（Ⅰ）求过点 M 且与圆 C 相切的直线方程.

（Ⅱ）已知圆 $Q: x^2+y^2-4x+2ay+a^2=0$，若圆 Q 与圆 C 的公共弦长为 $\sqrt{14}$，求圆 Q 的方程.

18.（本小题满分 12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=3a_n+1$.

（Ⅰ）证明数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是等比数列；

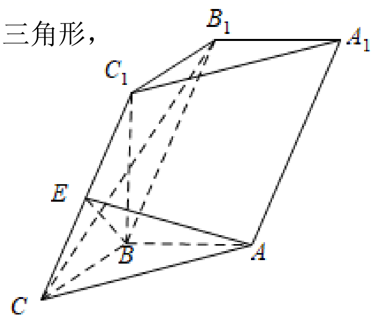
（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_{n+1}-b_n=a_n+\dfrac{1}{2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

19.（本小题满分 12 分）在平面直角坐标系中，动点 $P(x,y)$（其中 $x\geq 0$）到定点 $M(1,0)$ 的距离比到 y 轴的距离大1.

（Ⅰ）求动点 P 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）过点 M 的直线 l 交曲线 C 于 A,B 两点，若 $|AB|=8$，求直线 l 的方程.

20.（本小题满分 12 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，侧面 ABB_1A_1 是矩形，$AB=BC=1$，$BB_1=2$，$BC_1=\sqrt{3}$.



（Ⅰ）证明：$BC_1 \perp AC$；

（Ⅱ）E 是棱 CC_1 的中点，求直线 B_1C 与平面 ABE 所成角的正弦值.

21.（本小题满分 12 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_n>0$ 且 $a_1a_3=36$，$a_3+a_4=9(a_1+a_2)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $S_n+1=3^{b_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 及数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22.（本小题满分 12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且椭圆上的点到焦点的最长距离为 $1+\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(0,2)$ 的直线 l（不过原点 O）与椭圆 C 交于两点 A,B，M 为线段 AB 的中点.

（i）证明：直线 OM 与 l 的斜率乘积为定值；

（ii）求 $\triangle OAB$ 面积的最大值及此时 l 的斜率.

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（十六）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4. DBBA　　5-8. BADC

8【详解】当直线的斜率不存在时，其方程为 $x=1$，所以 $y_1^2=4, y_2^2=4$，则 $y_1^2+y_2^2=8$，

当直线的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$，可得 $ky^2-4y-4k=0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{4}{k}, y_1y_2=-4$，所以 $y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\dfrac{16}{k^2}+8$，

因为 $k^2>0$，所以 $y_1^2+y_2^2>8$，综上可得 $y_1^2+y_2^2\geq 8$，故 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值为 8.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. AB　　10. BC　　11. BCD　　12. BCD

12.【详解】对于 A，将 $(3+m)x+4y-3+3m=0$ 化为 $(x+3)m+3x+4y-3=0$，

由 $\begin{cases} x+3=0 \\ 3x+4y-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$，

所以直线 $(3+m)x+4y-3+3m=0(m\in\mathbf{R})$ 恒过定点 $(-3,3)$，故 A 不正确；

对于 B，圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 $(0,0)$，半径为 2，圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|0-0+\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=1$，

所以圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有 3 个点到直线 l：$x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离等于 1，故 B 正确；

对于 C，因为圆 $C_1: x^2+y^2+2x=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-4x-8y+m=0(m<20)$ 恰有三条公切线，

所以两圆外切，因为 $C_1(-1,0)$，半径 $r_1=1$，$C_2(2,4)$，半径 $r_2=\sqrt{20-m}$，

所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(-1-2)^2+(0-4)^2}=5$，所以 $1+\sqrt{20-m}=5$，解得 $m=4$，故 C 正确；

对于 D，设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{PA}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$，$\overrightarrow{CA}=(x_1,y_1)$，

因为 $PA\perp CA$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CA}=(x_1-x_0)x_1+(y_1-y_0)y_1=0$，所以 $x_0x_1+y_0y_1=x_1^2+y_1^2=4$，

同理 $x_0x_2+y_0y_2=4$，所以直线 AB 的方程为 $x_0x+y_0y=4$，又 $\dfrac{x_0}{4}+\dfrac{y_0}{2}=1$，

所以 $x_0=4-2y_0$，所以 $(4-2y_0)x+y_0y=4$，即 $4x-4=(2x-y)y_0$，

由 $\begin{cases} 4x-4=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ 得 $x=1, y=2$，所以直线 AB 经过定点 $(1,2)$，故 D 正确.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. ④　　14. 8　　15. $\dfrac{4n}{n+1}$　　16. $1-2^n(n\in\mathbf{N}^*)$

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17. 解：（Ⅰ）当直线 l 的斜率不存在时，显然直线 $x=3$ 与圆 C 相切，　……………………1 分

当直线 l 的斜率存在时，设切线方程为：$y+3=m(x-3)$，　……………………2 分

圆心到直线的距离等于半径 $\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{1+m^2}}=2$，解得 $m=-\dfrac{5}{12}$，　……………………4 分

切线方程为：$5x+12y+21=0$， ……………………………5 分

综上，过点 $M(3,-3)$ 且与圆 C 相切的直线方程为：$x=3$ 或 $5x+12y+21=0$.

（Ⅱ）圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 与圆 $Q:x^2+y^2-4x+2ay+a^2=0$，

相减得圆 C 与圆 Q 的公共弦所在直线方程 $l:2ay-2x+a^2+3=0$， ……………………………6 分

圆 C 的圆心为 $(1,0)$，$r=2$，设 C 到直线 l 的距离为 d，$\therefore d=\dfrac{\left|-2+a^2+3\right|}{\sqrt{(2a)^2+(-2)^2}}$， ……7 分

又∵圆 C 与圆 Q 公共弦长为 $\sqrt{14}$，$\therefore d^2+\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=r^2$，即 $\dfrac{\left(a^2+1\right)^2}{4a^2+4}+\dfrac{7}{2}=4$， ………8 分

解得 $a=\pm1$， ……………………………9 分

$\therefore$ 圆 Q 的方程为 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 或 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$. ……………………10 分

18. 解：（Ⅰ）因为 $a_{n+1}=3a_n+1$，所以 $a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$，即 $\dfrac{a_{n+1}+\dfrac{1}{2}}{a_n+\dfrac{1}{2}}=3$，且 $a_1+\dfrac{1}{2}=1$ …………4 分

所以 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列 ……………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $a_n+\dfrac{1}{2}=3^{n-1}$，所以 $a_n=3^{n-1}-\dfrac{1}{2}$ ……………………………7 分

因为 $b_{n+1}-b_n=a_n+\dfrac{1}{2}$，所以 $b_{n+1}-b_n=3^{n-1}$

当 $n\ge2$ 时，

$b_2-b_1=3^0$

$b_3-b_2=3^1$

……

$b_n-b_{n-1}=3^{n-2}$，$n\ge2$， ……………………………9 分

各式相加得：$b_n-b_1=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-2}=\dfrac{1(1-3^{n-1})}{1-3}=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$，

又 $b_1=1$，所以 $b_n=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}+1=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$， ……………………………11 分

又当 $n=1$ 时，$b_1=1$ 满足上式，

所以 $b_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$ ……………………………12 分

19. 解：（Ⅰ）动点 $P(x,y)$（其中 $x\ge0$）到 y 轴的距离为 x，到点 M 的距离为 $x+1$ ………………1 分

$\therefore|PM|=x+1$，又 $M(1,0)$，$\therefore\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1$ ……………………………3 分

$\therefore$ 轨迹 C 的方程：$y^2=4x$ ……………………………5 分

（Ⅱ）①若直线 l 斜率不存在时，易得 $A(1,2),B(1,-2)$，此时 $|AB|\ne8$ ……………………………6 分

②若直线 l 斜率存在时，设直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$，消 y 整理得：$k^2x^2-\left(2k^2+4\right)x+k^2=0$ ……………………………7 分

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}=2+\dfrac{4}{k^2}$ ……………………………8 分

$\therefore |AB|=x_1+x_2+p=2+\dfrac{4}{k^2}+2=8$， ……………………………10 分

解得 $k^2=1$，即 $k=\pm 1$ ……………………………11 分

∴直线 l 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$，即 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$. ……………12 分

20. 解：（Ⅰ）因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形，所以 $AB\perp BC$

因为侧面 ABB_1A_1 是矩形，所以 $AB\perp BB_1$

因为 $BC\cap BB_1=B$，所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1 …………2 分

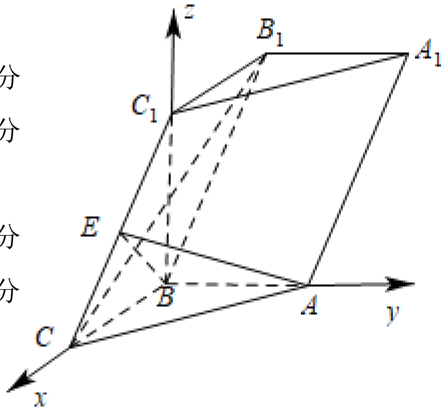
又因为 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp BC_1$ …………3 分

因为 $BC=1$，$BB_1=CC_1=2$，$BC_1=\sqrt{3}$，

所以 $BC^2+BC_1^2=CC_1^2$，所以 $BC\perp BC_1$ …………4 分

因为 $AB\cap BC=B$，所以 $BC_1\perp$ 平面 ABC …………5 分

因为 $AC\subset$ 平面 ABC．所以 $BC_1\perp AC$． …………6 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）知，BC,BA,BC_1 两两垂直，

故以 B 为坐标原点，分别以 BC,BA,BC_1 为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，如图.

则 $A(0,1,0),B(0,0,0),C(1,0,0)$，$E\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B_1\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$． ……………………………7 分

$\overrightarrow{BA}=(0,1,0),\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{B_1C}=(2,0,-\sqrt{3})$，设面 ABE 的法向量为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}y_1=0,\\ \dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$，令 $z_1=1$，得 $\vec{m}=\left(-\sqrt{3},0,1\right)$． …………………10 分

设直线 B_1C 与平面 ABE 所成角的大小为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}\right|}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{B_1C}\right|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$， ……………………………12 分

所以直线 B_1C 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$．

21. 解（Ⅰ）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由 $a_3+a_4=9\left(a_1+a_2\right)$，可得 $\left(a_1+a_2\right)q^2=9\left(a_1+a_2\right)$，$q^2=9$， ……………………………2 分

由 $a_n>0$，可得 $q=3$，由 $a_1a_3=36$，可得 $a_1a_1q^2=36$，可得 $a_1=2$， ………………………4 分

可得 $a_n=2\times 3^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$； ……………………………5 分

（Ⅱ）由 $a_n=2\times 3^{n-1}$，可得 $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{2\left(1-3^n\right)}{1-3}=3^n-1$， ……………………………7 分

由 $S_n+1=3^{b_n}$，可得 $3^n-1+1=3^{b_n}$，可得 $b_n=n$， ……………………………8 分

可得 $\{a_nb_n\}$ 的通项公式：$a_nb_n=2n\times 3^{n-1}$，

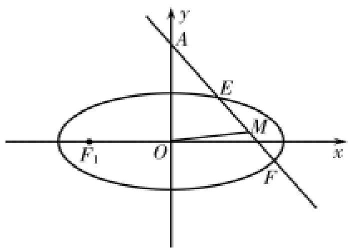
可得：$T_n=2\left(1\times 3^0+2\times 3^1+\cdots+n\times 3^{n-1}\right)$① ……………………………9 分

$3T_n=2\left(1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n\right)$②　　　　　　　　　　　　　　　　………………………………10 分

①-②得：$-2T_n=2\left(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n\right)=2\times\left(\dfrac{1-3^{n-1}\times3}{1-3}-n\times3^n\right)$，　…………………11 分

可得 $T_n=\dfrac{(2n-1)3^n+1}{2}$.　　　　　　　　　　　　　　　　………………………………12 分

22. 解：（Ⅱ）由题意得 $\begin{cases}a+c=1+\sqrt{2}\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ c=1\end{cases}$，　…………2 分



$\therefore a^2=2$，$b^2=a^2-c^2=1$，　　　　　　　……………3 分

$\therefore$椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.　　　　　　　……………4 分

（Ⅱ）（i）设直线 l 为 $y=kx+2$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_M,y_M)$，

由题意得 $\begin{cases}y=kx+2\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，$\therefore(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$，………………………………5 分

$\therefore\Delta=8(2k^2-3)>0$，即 $k^2>\dfrac{3}{2}$

由韦达定理得：$x_1+x_2=\dfrac{-8k}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}$　　　　………………………………6 分

$\therefore x_M=-\dfrac{4k}{1+2k^2}$，$y_M=kx_M+2=\dfrac{2}{1+2k^2}$

$\therefore k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{1}{2k}$，，$\therefore k\cdot k_{OM}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$直线 OM 与 l 的斜率乘积为定值　　　　　　　　　　　………………………………8 分

（ii）由（i）知 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{(1+k^2)(2k^2-3)}}{1+2k^2}$，

又点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，　　　　　　　………………………………10 分

$\therefore S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times d\times|AB|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}\times\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{(1+k^2)(2k^2-3)}}{1+2k^2}=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}$，

令 $\sqrt{2k^2-3}=t$，则 $t>0$，

$\therefore S_{\triangle OAB}=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+4}=\dfrac{2\sqrt{2}}{t+\dfrac{4}{t}}\le\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $t=2$ 时等号成立，此时 $k=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，且满足 $\Delta>0$，

$\therefore\triangle OAB$ 面积的最大值是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时 l 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ ………………………………12 分