泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（九）

命题人：陈智伟　杨小郎　20201115

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知直线 $l_1:(m+2)x+(m+3)y-5=0$ 和 $l_2:6x+(2m-1)y=5$ 互相平行，则 $m=$（　　）

A. 4　　B. $-\dfrac{5}{2}$　　C. 4，$-\dfrac{5}{2}$　　D. -1，$-\dfrac{9}{2}$

2. 圆 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称的圆的方程是（　　）

A. $(y+3)^2+(x-2)^2=1$　　B. $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

C. $(x+3)^2+(y+2)^2=1$　　D. $(y-3)^2+(x+2)^2=1$

3. 过点 $M(1,2)$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2+y^2=9$ 分成两段弧，当其中的劣弧最短时，直线 l 的方程是（　　）

A. $x=1$　　B. $y=1$　　C. $x-y+1=0$　　D. $x-2y+3=0$

4. 若直线 $y=kx-2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 交于 A,B 两个不同的点，且 AB 的中点的横坐标为 2，则 $k=$（　　）

A. 2　　B. -1　　C. 2 或 -1　　D. $1\pm\sqrt{5}$

5. 已知圆 $x^2+y^2=4$，直线 $l:y=x+b$，若圆 $x^2+y^2=4$ 上恰有 4 个点到直线 l 的距离都等于 1，

则 b 的取值范围为（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $[-1,1]$　　C. $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，M 为线段 AB 的中点，则以线段 AB 为直径的圆一定（　　）

A. 经过原点　　B. 经过点 $(-1,0)$　　C. 与直线 $x=-1$ 相切　　D. 与直线 $y=-1$ 相切

7. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于 P 点，若 ΔF_1PF_2 为等腰三角形，则椭圆的离心率是（　　）

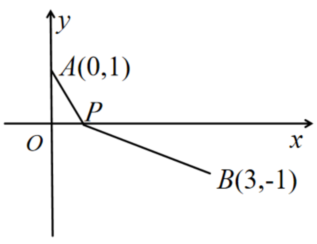
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　　C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

8. 已知点 P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上一点，点 F_1，F_2 分别为双曲线的左右焦点，点 I 是 ΔPF_1F_2 的内心（三角形内切圆的圆心），若恒有 $S_{\Delta IPF_1}-S_{\Delta IPF_2}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}S_{\Delta IF_1F_2}$ 成立，则双曲线的离心率取值范围是（　　）

A. $\left(1,\sqrt{2}\right)$　　B. $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$　　C. $\left(1,\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 某同学在研究函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10}$ 的性质时，受到两点间距离公式的启发，将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0-1)^2}$，则 $f(x)$ 表示 $|PA|+|PB|$（如图），下列关于函数 $f(x)$ 的描述，描述正确的是（　　）



A. $f(x)$ 的图象是中心对称图形　　B. $f(x)$ 的图象是轴对称图形

C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{13},+\infty)$　　D. 方程 $f[f(x)]=1+\sqrt{10}$ 有两个解

10. 已知圆 $M:\left(x+\cos\theta\right)^2+\left(y-\sin\theta\right)^2=1$，直线 $l: y=kx$，下列四个命题为真命题的是（　　）

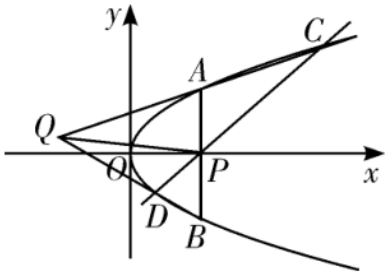
A．对任意实数 k 和 θ，直线和圆相切

B．对任意实数 k 和 θ，直线和圆有公共点

C．对任意实数 θ，必存在实数 k，使得直线与圆相切

D．对任意实数 k，必存在实数 θ 使得直线与圆相切

11. 如图，过点 $P(2,0)$ 作两条直线 $x=2$ 和 $l: x=my+2(m>0)$ 分别交抛物线 $y^2=2x$ 于 A,B 和 C,D (其中 A,C 位于 x 轴上方)，直线 AC,BD 交于点 Q. 则下列说法正确的是（　　）



A．C,D 两点的纵坐标之积为 -4

B．点 Q 在定直线 $x=-2$ 上

C．点 P 与抛物线上各点的连线中，PA 最短

D．无论 CD 旋转到什么位置，始终有 $\angle CQP=\angle BQP$

12. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名. 他发现："平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $\lambda\left(\lambda\neq1\right)$ 的点的轨迹是圆". 后来, 人们将这个圆以他的名字命名, 称为阿波罗尼斯圆, 简称阿氏圆在平面直角坐标系 xOy 中, $A\left(-2,0\right),B\left(4,0\right)$, 点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{1}{2}$. 设点 P 的轨迹为 C, 下列结论正确的是（　　）

A．C 的方程为 $\left(x+4\right)^2+y^2=9$

B．在 x 轴上存在异于 A,B 的两定点 D,E, 使得 $\dfrac{|PD|}{|PE|}=\dfrac{1}{2}$

C．当 A,B,P 三点不共线时, 射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线

D．在 C 上存在点 M, 使得 $\left|MO\right|=2|MA|$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 已知实数 x,y 满足方程 $\left(x-2\right)^2+y^2=1$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是______________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$A(4,1)$、$B(7,5)$、$C(-4,7)$，则 $\angle A$ 的平分线所在直线的一般式方程是______________.

15. 椭圆与双曲线有相同的焦点 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，椭圆的一个短轴端点为 B，直线 F_1B 与双曲线的一条渐近线平行，若椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1,e_2，则 $e_1e_2=$__________；且 $3e_1^2+e_2^2$ 的最小值为__________.

16. 经过原点的直线交椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 于 P,Q 两点（点 P 在第一象限），若点 P 关于 x 轴的对称点称为 M，且 $\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PM}$，直线 QA 与椭圆交于点 B，且满足 $BP\perp PQ$，

则直线 BP 和 BQ 的斜率之积为_________，椭圆的离心率为_________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分．）

17.（本小题满分 10 分）已知$\triangle ABC$的顶点$A\left(5,1\right)$，边AB上的中线CM所在直线方程为$2x-y-5=0$，边AC上的高BH所在直线方程为$x-2y-5=0$，

（Ⅰ）求顶点C的坐标；

（Ⅱ）求$\triangle ABC$的面积．

18.（本小题满分 12 分）已知坐标平面上两个定点$A\left(0,4\right)$，$O\left(0,0\right)$，动点$M\left(x,y\right)$满足：$\left|MA\right|=3\left|OM\right|$．

（Ⅰ）求点M的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形；

（Ⅱ）记（Ⅰ）中的轨迹为C，过点$N\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$的直线$l$被$C$所截得的线段的长为$2\sqrt{2}$，求直线$l$的方程．

19.（本小题满分 12 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，左焦点为$F_1$，右焦点为$F_2$，且椭圆上一动点$M$到$F_2$的最远距离为$\sqrt{2}+1$，过$F_2$的直线$l$与椭圆$C$交于$A,B$两点.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）当$\triangle F_1AB$以$\angle F_1AB$为直角时，求直线AB的方程；

（Ⅲ）直线l的斜率存在且不为0时，试问x轴上是否存在一点P使得$\angle OPA=\angle OPB$，若存在，求出点P坐标；若不存在，请说明理由.

20.（本小题满分 12 分）设抛物线$E: y^2=2px\left(p>0\right)$焦点为$F$，准线为$l$，$A$为$E$上一点，已知以$F$为圆心，$FA$为半径的圆$F$交$l$于$B,D$点．

（Ⅰ）若$\angle BFD=60^\circ$，$\triangle BFD$的面积为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，求p的值及圆F的方程；

（Ⅱ）若点A在第一象限，且A、B、F三点在同一直线l_1上，直线l_1与抛物线E的另一个交点记为C，且$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{FA}$，求实数$\lambda$的值．

21.（本小题满分 12 分）已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左右焦点是$F_1,F_2$，且$C_1$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．抛物线$C_2: y^2=2px\ \left(p>0\right)$的焦点为$F_2$，过$OF_2$的中点$Q$垂直于$x$轴的直线截$C_2$所得的弦长为$2\sqrt{6}$．

（Ⅰ）求椭圆C_1的标准方程；

（Ⅱ）设椭圆C_1上一动点T满足：$\overrightarrow{OT}=\lambda\overrightarrow{OA}+2\mu\overrightarrow{OB}$，其中$A,B$是椭圆$C_1$上的点，且直线$OA,OB$的斜率之积为$-\dfrac{1}{4}$．若$N(\lambda,\mu)$为一动点，点$P$满足$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{F_1F_2}$．试探究$\left|NP\right|+\left|NQ\right|$是否为定值，如果是，请求出该定值；如果不是，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）抛物线$y^2=2px(p>0)$上任意一点P到该抛物线焦点的距离比该点到y轴的距离多1．

（Ⅰ）求p的值；

（Ⅱ）如图，过定点$Q(2,0)$且互相垂直的两条直线l_1、l_2分别与该抛物线分别交于A、C、B、D四点．

（ⅰ）求四边形$ABCD$面积的最小值；

（ⅱ）设线段AC、BD的中点分别为M、N两点，试问：直线MN是否过定点？若是，求出定点坐标；若不是，请说明理由．

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（九）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4：BADA　5-8：DCDB

8.【解析】设 ΔPF_1F_2 的内切圆半径为 r，则 $S_{\Delta IPF_1}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r$，$S_{\Delta IPF_2}=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r$，$S_{\Delta IF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot r$，

因为 $S_{\Delta IPF_1}-S_{\Delta IPF_2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}S_{\Delta IF_1F_2}$，所以 $|PF_1|-|PF_2|\le\frac{\sqrt{2}}{2}|F_1F_2|$，

由双曲线的定义可知 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，所以 $2a\le\sqrt{2}c$，即 $\frac{c}{a}\ge\sqrt{2}$.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. BC　10. BD　11. AB　12. BC

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　14. $7x+y-29=0$　15. 1；$2\sqrt{3}$　16. $-\frac{2}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}$

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17. 解：（Ⅰ）设 $C(m,n)$，因为直线 AC 与直线 BH 垂直，且 C 点在直线 $2x-y-5=0$ 上，

所以 $\begin{cases}\frac{n-1}{m-5}=-2\\2m-n-5=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=4\\n=3\end{cases}$，故 $C(4,3)$.

（Ⅱ）设 $B(a,b)$ 由题知：$M\left(\frac{a+5}{2},\frac{b+1}{2}\right)$，

所以 $\begin{cases}a+5-\frac{b+1}{2}-5=0\\a-2b-5=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$，即 $B(-1,-3)$. $k_{BC}=\frac{3+3}{4+1}=\frac{6}{5}$，

直线 $BC: y-3=\frac{6}{5}(x-4)$，即：$6x-5y-9=0$.

$|BC|=\sqrt{(4+1)^2+(3+3)^2}=\sqrt{61}$，点 A 到直线 BC 的距离 $d=\frac{|6\times5-5-9|}{\sqrt{6^2+(-5)^2}}=\frac{16}{\sqrt{61}}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{61}\times\frac{16}{\sqrt{61}}=8$.

18. 解：（Ⅰ）由 $|MA|=3|OM|$ 得 $\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=3\sqrt{x^2+y^2}$，

化简得：$x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$，轨迹为圆

（Ⅱ）当直线 l 的斜率不存在时，直线 $l: x=-\frac{1}{2}$ 符合题意；

当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为：$y-1=k(x+\frac{1}{2})$，即 $kx-y+\frac{1}{2}k+1=0$，

由圆心到直线的距离等于$d=\dfrac{|\frac{3}{2}+\frac{k}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\dfrac{1}{2}$，解得$k=-\dfrac{4}{3}$，

直线l方程为$4x+3y-1=0$，

所求的直线l的方程为：$4x+3y-1=0$或$x=-\dfrac{1}{2}$.

19. 解：（Ⅰ）$\because\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a+c=\sqrt{2}+1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ c=1\\ b=1\end{cases}$，$\therefore\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（Ⅱ）法一：由题意可知，当k不存在时，$\triangle F_1AB$不符合题意，

设$A(x_0,y_0)$，$\because|AO|=1$，$\therefore x_0^2+y_0^2=1$，

又$\because x_0^2+2y_0^2=2$，$\therefore {x_0}^2=1$，$A(0,1)$或$A(0,-1)$，$\therefore k=\pm1$，

$\therefore$直线AB的方程为$y=x-1$或$y=-x+1$。

法二：由题意可知，当k不存在时，$\triangle F_1AB$不符合题意.

设直线$l_{AB}:y=k(x-1)$，则$l_{AF_1}:y=-\dfrac{1}{k}(x+1)$，

$\therefore\begin{cases}y=k(x-1)\\ y=-\dfrac{1}{k}(x+1)\end{cases}$，得$(k^2+1)x=k^2-1$，

$\therefore A\left(\dfrac{k^2-1}{k^2+1},\dfrac{-2k}{k^2+1}\right)$，$\therefore\dfrac{(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}+\dfrac{8k^2}{(k^2+1)^2}=2$，

$7k^4-6k^2-1=0$，$\therefore k^2=1$，直线AB的方程为$y=-x+1$或$y=x-1$.

（Ⅲ）设$P(m,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$l_{AB}:y=k(x-1)$，

所以$\begin{cases}y=k(x-1)\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$，$\therefore(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

$\because k_{AP}=\dfrac{y_1}{x_1-m}$，$k_{BP}=\dfrac{y_2}{x_2-m}$，

所以$k_{AP}+k_{BP}=\dfrac{y_1(x_2-m)+y_2(x_1-m)}{(x_1-m)(x_2-m)}=0$，$\therefore y_1x_2+y_2x_1-m(y_1+y_2)=0$，

$\therefore 2kx_1x_2-(k+mk)(x_1+x_2)+2km=0$，$\therefore 2km=4k,m=2$，$\therefore P(2,0)$.

20. 解：（Ⅰ）焦点到准线l的距离为p，

又$\because BF=FD$，$\angle BFD=60^\circ$，$\therefore\triangle BFD$为正三角形.

$\therefore|BF|=\dfrac{2p}{\sqrt{3}}$，$B\left(-\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{\sqrt{3}}\right)$，

$\therefore S_{\triangle BFD}=\dfrac{1}{2}|BF|^2\sin60^\circ=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$，$\therefore p=2$，

$\therefore$圆 F 为 $(x-1)^2+y^2=\dfrac{16}{3}$.

（Ⅱ）若 A、F、B 共线，则 $|AF|=|BF|=|DF|$，$\therefore\angle BDA=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore AD=AF=\dfrac{1}{2}AB$，$\therefore\angle DBA=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$直线 AB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$，

由对称性可知，设直线 l：$x=\dfrac{y}{\sqrt{3}}+\dfrac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{FA}$，

联立 $\begin{cases}x=\dfrac{y}{\sqrt{3}}+\dfrac{p}{2}\\ y^2=2px\end{cases}\Rightarrow y^2-\dfrac{2p}{\sqrt{3}}y-p^2=0\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{2p}{\sqrt{3}}=(1-\lambda)\cdot y_1\\ y_1\cdot y_2=-p^2=-\lambda\cdot y_1^2\end{cases}$，

$\therefore\dfrac{4}{3}=\dfrac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$，$\therefore 3\lambda^2-10\lambda+3=0$，$\therefore\lambda=3$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，

又 $|AF|=|BF|>p$，$x_1>\dfrac{p}{2}$，$\therefore 0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

21. 解：（Ⅰ）抛物线 $C_2:y^2=2px$ 的焦点为 $F_2(\dfrac{p}{2},0)$，$\therefore Q(\dfrac{p}{4},0)$

过 Q 垂直于 x 轴的直线截 $y^2=2px$ 所得的弦长为 $2\sqrt{6}$

所以 $\left(\sqrt{6}\right)^2=2p\times\dfrac{p}{4}$，解得 $p=2\sqrt{3}$. 所以 $F_2(\sqrt{3},0)$

又$\because$椭圆 C_1 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore a=2,b=1$

$\therefore$椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，.

（Ⅱ）设 $T(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OT}=\lambda\overrightarrow{OA}+2\mu\overrightarrow{OB}$，得 $x=\lambda x_1+2\mu x_2$，$y=\lambda y_1+2\mu y_2$

$\because$点 T,A,B 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，

$\therefore$所以 $x_1^2+4y_1^2=4$，$x_2^2+4y_2^2=4$，$x^2+4y^2=4$

故 $x^2+4y^2=(\lambda x_1+2\mu x_2)^2+4(\lambda y_1+2\mu y_2)^2$

$$=\lambda^2(x_1^2+4y_1^2)+4\mu^2(x_2^2+4y_2^2)+4\lambda\mu(x_1x_2+4y_1y_2)=4.$$

设 k_{OA},k_{OB} 分别为直线 OA,OB 的斜率，由题意知，$k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{4}$

因此 $x_1x_2+4y_1y_2=0$　　所以 $\lambda^2+4\mu^2=1$，所以 N 点是椭圆上 $\lambda^2+\dfrac{\mu^2}{\frac{1}{4}}=1$ 上的点，

$\because Q(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，又$\because\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{F_1F_2}$，$\therefore P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

$\therefore P,Q$ 恰为椭圆 $\lambda^2+\dfrac{\mu^2}{\frac{1}{4}}=1$ 的左、右焦点，由椭圆的定义，$|NP|+|NQ|=2$ 为定值.

22. 解：（Ⅰ）由已知 $\frac{p}{2}=1$ $\quad\therefore\ p=2$

（Ⅱ）（i）由题意可设直线 ℓ_1 的方程为 $x=2+my$ （ $m\neq 0$ ），代入 $y^2=4x$ 得 $y^2-4my-8=0$

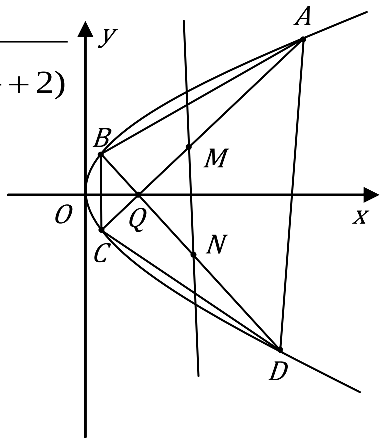
设 $A(x_1,y_1),C(x_2y_2)$ 则 $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1\bullet y_2=-8 \end{cases}$， $\qquad \Delta=16(2+m^2)>0$

$\therefore |AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}=\sqrt{(m^2+1)(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(m^2+1)[(y_1-y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{(m^2+1)(16m^2+32)}=4\sqrt{(m^2+1)(m^2+2)}=4\sqrt{m^4+3m^2+2}$

同理可得 $|BD|=4\sqrt{\frac{1}{m^4}+\frac{3}{m^2}+2}$



$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\bullet|BD|=8\sqrt{(m^4+3m^2+2)(\frac{1}{m^4}+\frac{3}{m^2}+2)}$

$=8\sqrt{2(m^4+\frac{1}{m^4})+9(m^2+\frac{1}{m^2})+14}$

$=8\sqrt{2(m^2+\frac{1}{m^2})^2+9(m^2+\frac{1}{m^2})+10}$

设 $t=m^2+\frac{1}{m^2}$ 则 $t\geq 2$ $\quad\therefore S_{四边形ABCD}=8\sqrt{2t^2+9t+10}$

$\because$ 函数 $y=2t^2+9t+10$ 在 $\left[2,+\infty\right)$ 上是增函数

$\therefore S_{四边形ABCD}\geq 8\sqrt{36}=48$，当且仅当即 $t=2$ 即 $m=\pm 1$ 时取等号

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最小值是 48 .

（ii）由①得 $y_1+y_2=4m,$ $\quad\therefore\ y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$ $\quad\therefore\ x_M=2+my_M=2+2m^2$

$\therefore\ M(2+2m^2,2m)$，

同理得 $N(2+\frac{2}{m^2},-\frac{2}{m})$

$\therefore$ 直线的方程可表示为 $(y-2m)(\frac{2}{m^2}-2m^2)=(-\frac{2}{m}-2m)(x-2-2m^2)$

即 $(y-2m)(1-m^2)=-m(x-2-2m^2)$

当 $y=0$ 时得 $x=4$

$\therefore$ 直线 MN 过定点 $(4,0)$.

注：第（Ⅱ）中的第（i）问：

$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\bullet|BD|=8\sqrt{(m^2+1)(m^2+2)}\bullet\sqrt{(\frac{1}{m^2}+1)(\frac{1}{m^2}+2)}$

$=8\sqrt{\left[(m^2+1)(\frac{1}{m^2}+1)\right]\left[(m^2+2)(\frac{1}{m^2}+2)\right]}=8\sqrt{(2+m^2+\frac{1}{m^2})(5+\frac{2}{m^2}+2m^2)}$

$\geq 8\sqrt{(2+2)(5+2\times 2)}=48$（当且仅当 $m=\pm 1$ 时取等号）也可.