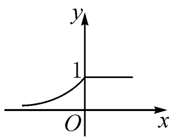
第二十六届“希望杯”全国数学邀请赛

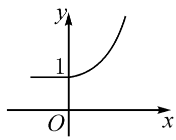
高一　第 2 试试题

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分. 以下每个题目的选择支中，仅有一个是正确的.）

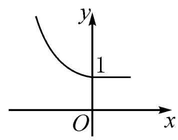
1. 定义运算：$a \otimes b=\begin{cases} a\,(a \geqslant b) \\ b\,(a<b)\end{cases}$，则函数 $f(x)=1 \otimes \dfrac{1}{2^{x}}$ 的图象是（　　）



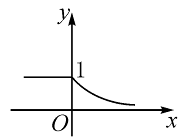
(A)



(B)



(C)



(D)

2. 已知 a,b 是方程 $x^2+2000x+1=0$ 的两个根，则 $(a^2+2014a+15)(b^2+2015b+16)$ 的值为（　　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) -419580.　　(D) -420000.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $3(a_3+a_5)+2(a_7+a_{10}+a_{13})=24$. 则此数列前 13 项之和等于（　　）

(A) 13.　　(B) 26.　　(C) 52.　　(D) 156.

4. 定义集合 $A_k=\{x \mid x$ 是 k 个大于 1 的连续自然数之积$\}$ $(k=1,2,\cdots)$，那么集合 $A_3 \cap A_5$ 中的最小元素是（　　）

(A) 24.　　(B) 60.　　(C) 120.　　(D) 720.

5. 对任意的实数 x，若关于 x 的不等式 $(1-a)x^2-2(1-a)x+6>0$ 恒成立，那么大于 a 的最小整数是（　　）

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) 0.　　(D) -5.

6. 已知函数 $f(x)=1-2^x$，$g(x)=x^2-4x+3$，若存在 a,b 使得 $f(a)=g(b)$，则 b 的取值范围是（　　）

(A) $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$.　　(B) $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$.　　(C) $[1,3]$.　　(D) $(1,3)$.

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+14}{x+2}$ $(a \in \mathbf{R})$，若对任意的 $x \in \mathbf{N}^*$，$f(x) \geqslant 3$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

(A) $\left(-\infty,-\dfrac{8}{3}\right]$.　(B) $\left[\dfrac{26}{3},+\infty\right)$.　　(C) $\left[-\dfrac{8}{3},+\infty\right)$.　　(D) $[-3,+\infty)$.

8. 当 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 时，关于 x 的函数 $y=-a\left(\sin^2\dfrac{x}{2}-2\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}\right)$ 的图象与 $|y|=2$ 的图象恰有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围是（　　）

(A) $|a|<1$.　　(B) $|a|>1$.　　(C) $|a|<2$.　　(D) $|a|>2$.

9. 如图 1，在 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上有点 P，它到这个三角形两条直角边的距离分别为 4 和 3，则当 $\triangle ABC$ 的面积最小时，PB 的长是（　　）

(A) 5.　　(B) 4.　　(C) 3.　　(D) $\dfrac{3}{4}$.

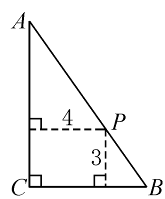


图 1

10. Given $m,n \in \mathbf{Z}$, define $f(x)=\log_2(4-|x|)$ in the interval $[m,n]$. The value range of $f(x)$ is $[0,2]$. If there exists only one zero point on $g(x)=2^{|x-1|}+m+1$, then $m+n=$（　　）

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) 2.

（英汉小词典：interval 区间；value range 值域）

二、填空题（每小题 4 分，共 40 分.）

11. 如图 2，$ABCD$-$EFGH$ 是一个正方体，M、N 是所在棱的中点，用过 M、N、H 三点的平面切开此正方体，切下的三棱锥的表面积与原正方体表面积的比是__________.

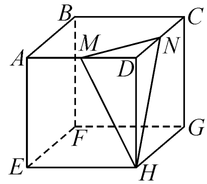


图 2

12. 若函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$f(x)=x^2-4x+5$，则当 $-4 \leqslant x \leqslant -1$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为__________.

13. 平面上有点 $A(-3,0)$ 和 $B(0,-3)$，点 C 在直线 $l: 3x+y-2=0$ 上运动，当 $CA+CB$ 最小时，点 C 的坐标为__________.

14. 已知抛物线 $y=ax^2+bx$ 过点 $A(4,0)$，若点 $B(x,y)$ 为该抛物线在第一象限内的一个动点，且使得 $\triangle AOB$ 的面积取到最大值 8，则 $a+b=$__________.

15. 已知平面直角坐标系中，点 $B(2,0)$，点 A 在线段 OB 上，$AB=\sqrt{2}$. 将线段 OB 绕点 O 按逆时针方向旋转角 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 到点 B'，点 A 到点 A'，对于 y 轴上的点 P，若 $\triangle B'PA'$ 是以 $\angle B'$ 为顶角的等腰三角形，则 α 的取值范围是__________.

16. 若关于 x 的不等式 $(k^2-1)x^2+2(k+1)|x|+1>0$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是__________.

17. 若 $a^2+4b^2=1$，则 $\dfrac{8ab}{a+2b}$ 的最大值为__________.

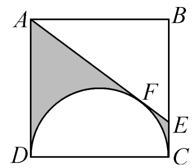


Fig. 3

18. As shown in the Fig. 3, the side length of square $ABCD$ is 4. E is on BC. AE is tangent to a half circle circle at point F. The half circle is inside the square with CD as diameter. Find the area of the shaded portion. Answer: __________.

（英汉小词典：diameter 直径；tangent 相切的）

19. 定义符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x<0\end{cases}$，令数列 $a_n=\operatorname{sgn}\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)$，$b_1=1$，$b_2=2$，$b_{n+2}=b_{n+1}-b_n(n \geqslant 3)$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2015} a_k b_k=$__________.

20. 在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别是角 A、B、C 的对边. 若 $a=7$，$c=5$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，则 $\angle C=$__________.

三、解答题　每题都要写出推算过程.

21.（本题满分 10 分）

已知 $a_n=\log_{n+2}(n+3)(n \in \mathbf{N}^*)$，定义：可使乘积 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k$ 为整数的 $k(k \in \mathbf{N}^*)$ 为“最佳数”，求在区间 $[1,2015]$ 内的所有“最佳数”的和.

22.（本题满分 15 分）

如图 4，四边形 $ABCD$ 有外接圆，已知 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$.

(1) 求对角线 BD 的长；

(2) 作 $\angle BPD=60^\circ$，试求 PB^2+PD^2 的取值范围.

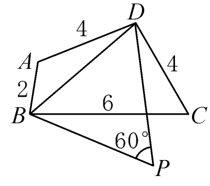


图 4

23.（本题满分 15 分）

已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=6$，$a_2=b_2=4$，$a_3=b_3=3$，当 $n \geqslant 1$ 时，若数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，数列 $\{b_n-2\}$ 为等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $f(n)=a_n-b_n$，$n \in \mathbf{N}^*$，当 $n \geqslant 4$ 时，求 $f(n)$ 的最小值.

高一　第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	D	A	B	C	B	A	C

题号	11	12	13	14	15
答案	1:6	-1	$\left(\frac{9}{8},-\frac{11}{8}\right)$	3	$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

题号	16	17	18	19	20
答案	$k\geq 1$ 或 $k\leq -1$	$\sqrt{2}$	$10-2\pi$	1	$\frac{\pi}{4}$

21. 1074.

22. （1）$BD=2\sqrt{7}$.

（2）PB^2+PD^2 的取值范围为$(28,56]$.

23. （1）数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式分别为

$$a_n=\frac{n^2-7n+18}{2}，\quad b_n=2+8\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

（2）当$n\geq 4$时，$f(n)$ 的最小值是$\frac{1}{2}$.