

第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第2试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 下列四个选项中,能表示图1中的阴影部分的是()

- (A) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$. (B) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 (C) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$. (D) $(A \cup B) \cap C$.

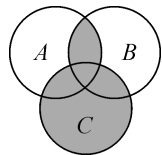


图1

2. 一款触摸屏手机,在设计键盘锁时采用了新的方案:将0~9这10个数字按由小到大的顺序等距排成一个圆,并顺时针不停地旋转.小明发现爸爸只按动了3次便打开了键盘锁.那么,小明为了保证打开手机的键盘锁,至少要尝试()次.

- (A) 3. (B) 40. (C) 240. (D) 1000.

3. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\tan A = 2, \tan B = 3$,则内角 C 的值为()

- (A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{3\pi}{4}$.

4. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的单调递增区间是()

- (A) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$. (B) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. (C) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. (D) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

5. 从集合 $M = \left\{x \mid \frac{720}{x} \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{N}^*\right\}$ 中取出3个元素,从小到大排成一列,使其成等比数列,则所有不同的公比之和是()

- (A) 15. (B) 21. (C) 23. (D) 27.

6. 若 $\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha + 3\cos \alpha + 1 = 0$,则 $\tan \alpha =$ ()

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $-\frac{3}{4}$. (D) $-\frac{4}{3}$.

7. 如图2,在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E 是棱 AB 的中点,点 F 在棱 CD 上,且 $DF : FC = 2 : 1$,则 A_1E 与 C_1F 的距离等于()

- (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) 2. (D) $\sqrt{5}$.

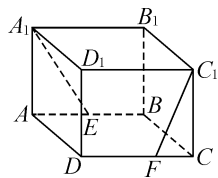


图2

8. Given provision $f_n(x) = \underbrace{f \cdots f}_{n \uparrow f}(f(x))$, n is a positive integer.

If $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ then the value of $f_{2013}\left(\frac{4}{5}\right)$ is ()

- (A) $\frac{2}{5}$. (B) $\frac{6}{5}$. (C) $\frac{1}{5}$. (D) $\frac{8}{5}$.

9. 已知 $f(x) = x^3 + 3x + q$, 并且 $a + b > 0, b + c > 0, c + a > 0$. 若设 $p = f(a) + f(b) + f(c)$, 则()

- (A) $p > q$. (B) $p < q$. (C) $p > 3q$. (D) $p < 3q$.

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, 并且公比 $q < 0$, 若令 $t = a_1 a_2 a_3$, 则 t 的取值范围是()

- (A) $(-\infty, -1]$. (B) $(0, 1]$. (C) $[-1, +\infty)$. (D) $[-1, 0)$.

二、填空题(每小题4分,共40分.)

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2014}\right) =$ _____.

12. 已知幂函数 $f(x) = x^{m^2-2m-3}$ ($m \in \mathbf{Z}$) 的图象与 x 轴, y 轴都没有交点, 但是关于 y 轴对称, 那么 $f(x) =$ _____.

13. 若 $y = \log_{2013}(x^2 - ax + 65)$ 的值为 \mathbf{R}^+ , 那么 a 的取值范围是 _____.

14. 自点 $P(-5, 5)$ 发出的光线 l 经过 x 轴反射, 其反射光线所在直线正好与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 那么入射光线 l 所在直线的方程是 _____.

15. 命题 p : 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2-ax}}{a-1}$ (a 是不等于0的常数), 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 2]$.

命题 q : 由于偶函数满足对于定义域内的任何一个 x 都有 $f(x) = f(-x)$, 所以它不是一一对应关系, 故偶函数一定不存在反函数.

则 $(\neg p) \vee (\neg q)$ 是 _____ 命题. (填“真”或“假”)

16. Given $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, and $3^x = 4^y = 6^z$. Then write $3x, 4y,$ and $6z$ in order from least to greatest as _____.

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n+7}$, 则 $\frac{a_8}{b_6} =$ _____.

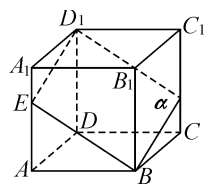


图3

18. 如图3, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 AA_1 上一点, 且 $AE = 2A_1E$, 设过点 B, D_1, E 的平面为 α , 则 α 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值是 _____.

19. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $a_9 - a_4 = 2a_3, a_m + a_n = 2a_5$, 则 $\frac{2a_m a_n}{3a_1 d}$ 的最大值是 _____.

x_1
 $x_2 \ x_3$
 $x_4 \ x_5 \ x_6$
 $x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10}$
.....

图4

20. 已知 $\{x_n\}$ 是等比数列, 把数列 $\{x_n\}$ 中的所有项按图4所示的规律排成一个三角形数表. 则当 $x_3 = 4, x_6 = 32$ 时, 图中第 m 行第1个数是 _____.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分10分)

过圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 外一点 $P(a, b)$ 作圆 C 的切线 PT, T 为切点, 使 $|PT| = |PO|$. 当 $|PT|$ 取得最小值时, 求点 P 的坐标及 $|PT|$ 的值.

22. (本题满分15分)

若关于 x 的方程 $\frac{|x-1|}{x} = k(x-1)^2$ 有4个不同的实数根, 其和为 S . 求:

(1) 实数 k 的取值范围;

(2) 实数 S 的取值范围.

23. (本题满分15分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(1+x), & x \geq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & x < 0. \end{cases}$

(1) 判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性;

(2) 对任意两个实数 x_1, x_2 , 求证: 当 $x_1 + x_2 > 0$ 时, $f(x_1) + f(x_2) > 0$;

(3) 对任何实数 $x, f(e^{2x} - a) + f(3 - 2e^x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

高一 第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	D	D	D	C	C	C	D
题号	11		12		13		14			15
答案	2015		x^0 或 x^{-4}		$-16 < a < 16$		$3x+4y-5=0$ 或 $4x+3y+5=0$			真
题号	16			17		18		19		20
答案	$3x < 4y < 6z$			$\frac{3}{4}$		$\frac{\sqrt{5}}{3}$		27		$\frac{m^2-m}{2^2}$

21. 当 $|PT|$ 取得最小值时, 点 P 的坐标是 $\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)$, $|PT| = \frac{7-\sqrt{2}}{8}$.

22. (1) k 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

(2) $S \in \left(3, \frac{5+\sqrt{2}}{2}\right)$.

23. (1) $y=f(x)$ 是奇函数.

(2) 略.

(3) a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.