

第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第 2 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 如果一个几何体的主视图和左视图均为矩形,而俯视图为一个圆,则这个几何体是()

- (A) 棱锥. (B) 直棱柱. (C) 圆锥. (D) 圆柱.

2. 已知 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 27$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$,

$A = \{x \mid f(x) > 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0 \text{ 且 } x \in A\}$, 则 B 中元素的个数是()

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多.

3. 关于 x 的方程 $2^x = \frac{1}{1 - \ln a}$ 有正根, 则实数 a 的取值范围是()

- (A) $(0, 1)$. (B) $(1, e)$. (C) $(1, +\infty)$. (D) $(e, +\infty)$.

4. If $y^2 = 2x$ where x and y are real numbers, then the minimum value of $z = y^2 + x^2 + 4$ is()

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

5. 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 并且 $f(x+6) = f(x) + f(3)$, 若 $f(2) = 2014$, 则 $f(2014)$ 等于()

- (A) 2012. (B) 2013. (C) 2014. (D) 2015.

6. 若关于 x 的方程 $|2^x - 3| - k = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是()

- (A) $[0, 3)$. (B) $(0, 3)$. (C) $[0, +\infty)$. (D) $(-\infty, 3)$.

7. 已知 x, y 是实数, 且 $y = 2x + \sqrt{8-x}$, 则 y 的最大值是()

- (A) 6. (B) $\frac{25}{4}$. (C) $\frac{97}{8}$. (D) $\frac{129}{8}$.

8. 若对于任意的实数 x , 不等式 $|x-1| - |x-a| \leq 10$ 恒成立, 则 a 的取值范围是()

- (A) $[-3, 4]$. (B) $[-4, 3]$. (C) $[-9, 11]$. (D) $[-11, 9]$.

9. 已知 $a, b, m, n \in \mathbf{R}$, 且 $m^2 n^2 > a^2 m^2 + b^2 n^2$. 令 $M = \sqrt{m^2 + n^2}$, $N = a + b$, 则 M 与 N 的大小关系是()

- (A) $M > N$. (B) $M \geq N$. (C) $M < N$. (D) $M \leq N$.

10. 若函数 $f(x) = x^2 - 2a|x-a| - 2ax + 1$ 有且仅有 3 个零点, 则实数 a 的值是()

- (A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

二、填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 函数 $f(x) = 2^{\log_{\frac{1}{4}}(x+\frac{9}{x})}$ 的定义域是_____.

12. 如图 1, 三棱锥 $A-BCD$ 的顶点 B, C, D 在平面 α 内, $CA = AB = BC = CD = DB = 2$, $AD = \sqrt{6}$. 若将该三棱锥以 BC 为轴转动, 到点 A 落到平面 α 内为止, 则 A, D 两点所经过的路程之和是_____.

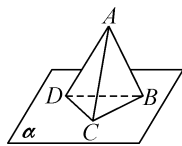


图 1

13. 已知函数 $f(x) = x^{-\frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}k + 2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 k 的值是

14. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 0, \\ x - 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 则不等式 $x + (x + 1)f(x + 1) \leq 3$ 的

解集是_____.

15. 如图 2 所示, 已知 AB 切 $\odot O$ 于点 B , 直线 AC 交 $\odot O$ 于点 C 和 D , 若 $AD = DC$, $BC = \sqrt{2}$, 则 $BD =$ _____.

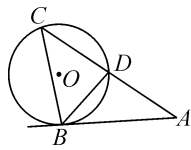


图 2

16. 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 且 $f(0) = 3, f(3) = -1$. 已知 $P = \{x \mid |f(x + t) - 1| < 2\}$, $Q = \{x \mid f(x) < -1\}$, 若 P 是 Q 的真子集, 则实数 t 的取值范围是_____.

17. 若函数 $f(x) = (a + 2)x^2 - ax + (2a - 1)$ 的两个零点分别在区间 $(-2, -1)$ 和区间 $(0, 1)$ 内, 则 a 的取值范围是_____.

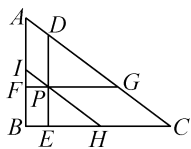
18. 若关于 x 的不等式 $2kx^2 > (x - 2)^2$ 恰有 4 个整数解, 则实数 k 的取值范围是_____.

$$\lfloor y \geq x, \quad \lfloor$$

19. 设 $m > 1$, 若 x, y 满足 $\lfloor y \leq mx$, 时, 函数 $z = x + my$ 的最大值是 4, 则 m 的值是

$$\lfloor x + y \leq 1$$

20. As shown in Fig. 3, $AB = 6, BC = 8, CA = 10$. Point P is inside of the triangle ABC . DE, FG , and IH all pass point P and are parallel to AB, BC , and CA , respectively. The lengths of DE, FG and IH are all equal to d , then $d =$ _____.



(英汉小词典: parallel 平行)

Fig. 3

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

记 $f(x) = \lg(3 - |x - 1|)$ 的定义域为 A , 集合 $B = \{x \mid x^2 - (a + 1)x + a < 0\}$. 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

22. (本题满分 15 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 已知 $8(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b)\sin B$, 且 $\triangle ABC$ 的外接圆半径是 4.

(1) 求角 C ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

23. (本题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ($x \neq 0, a \in \mathbf{R}$).

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 当 $x \in [2, +\infty)$ 时, 若 $f(x)$ 是增函数, 求实数 a 的取值范围.

高一 第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	B	B	C	B	D	C	A	C
题号	11		12		13		14		15	
答案	$(0, +\infty)$		$\sqrt{3}\pi$		1 或 2		$(-\infty, 1]$		1	
题号	16		17		18		19		20	
答案	$(-\infty, -3]$		$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$		$\frac{9}{50} < k \leq \frac{2}{9}$		$2 + \sqrt{7}$		$\frac{240}{47}$	

21. $[-2, 4]$.

22. (1) $\angle C = \frac{\pi}{3}$.

(2) 面积最大值是 $12\sqrt{3}$.

23. (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^2$ 为偶函数;

当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2) 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 16]$.