第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高一　第 2 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 设 A,B 是同一个三角形的两个内角,则**不是** $A<B$ 成立的充要条件的是(　　)

(A) $\sin A<\sin B$.　(B) $\sin 2A<\sin 2B$.　(C) $\cos A>\cos B$.　(D) $\cos 2A>\cos 2B$.

2. 函数 $f(x)=\left|\lg|2-x|\right|$ 的单调增区间是(　　)

(A) $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.　(B) $(1,2)\cup(3,+\infty)$.

(C) $(-\infty,1)\cup(2,3)$.　(D) $(1,2)\cup(2,3)$.

3. 图 1 中的图形所表示的是将棱长为 a 的立方体用一个平面切割后剩下的几何体,则它的体积不等于原立方体体积一半的有(　　)个.

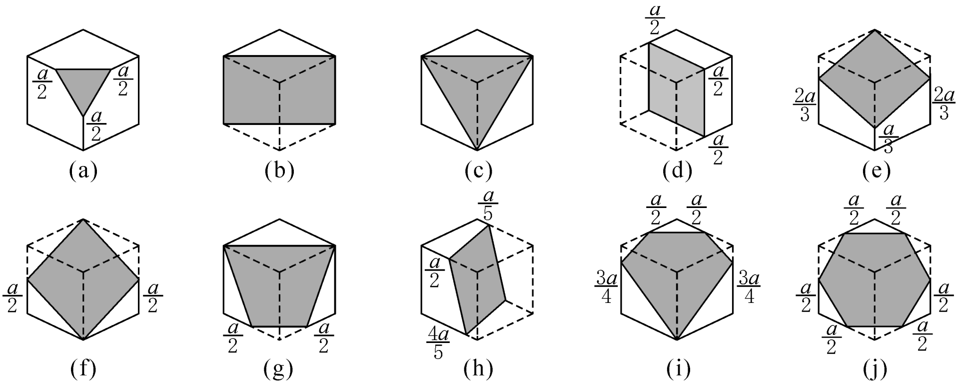

图 1

(A) 3.　(B) 4.　(C) 5.　(D) 6.

4. $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列,S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.给出下面 3 个命题:

(1) 若 $\{a_n\}$ 中既有正数,又有负数,那么 $\{S_n\}$ 中也既有正数,又有负数;

(2) $\{a_n\}$ 不可能同时具有最大值和最小值;

(3) $S_{10},S_{20}-S_{10},S_{30}-S_{20},S_{40}-S_{30},\cdots$ 构成等比数列.

其中,真命题的个数是(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

5. 在正数数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=\dfrac{1}{4}$,$a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n}+\dfrac{1}{4}$,则 $a_{2012}=$(　　)

(A) 1012025.　(B) 1012036.　(C) 1013025.　(D) 1013036.

6. 若存在 $x\in[1,2]$,使得 $|a\cdot 2^x-1|-2>0$,则 a 的取值范围是(　　)

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.　(B) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

(C) $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$.　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

7. 已知 O 是坐标原点,动点 M 在圆 $C:(x-4)^2+y^2=4$ 上,对该坐标平面内的点 N 和 P,若 $2\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MP}=\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{NP}|$ 的取值范围是(　　)

(A) $[0,12]$.　(B) $[1,11]$.　(C) $[2,11]$.　(D) $[1,12]$.

8. 已知关于 x 的方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有三个不同的实根,其中一个是 0,则它的系数中不能是 0 的仅有(　　)

(A) a,c.　(B) b,c.　(C) a,d.　(D) b,d.

9. 已知集合 $A=\left\{a \left| 关于 x 的方程\frac{2x+a}{4x^2-9}=1 有唯一实数解\right.\right\}$,则集合 A 的真子集的个数是(　　)

(A) 0.　　(B) 3.　　(C) 7.　　(D) 8.

10. 如图 2 所示,已知圆锥的底面半径为 7,母线长为 14,FC 是轴截面 ABC 底角 $\angle ACB$ 的平分线,BD 是底面的一条弦,且 $\angle DBC=30°$,则直线 FC 与 BD 的距离是(　　)

(A) $\sqrt{14}$.　　(B) $2\sqrt{7}$.　　(C) $3\sqrt{7}$.　　(D) $\frac{7}{2}$.

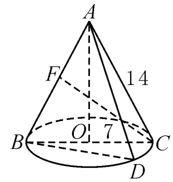

图 2

二、填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 直角梯形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=90°$,$AD \parallel BC$,$AB=AD=2$,$BC=4$,I 为 BD 的中点,直线 MN 过 I 点,且与线段 AB、CD 分别交于点 M、N,则 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM}$ 的最小值是__________.

12. 已知 $y=x^2+x+18$ 且 $y\leqslant 10|x+1|$,则 x 的取值范围是__________.

13. 当 $a\geqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1$ 时,函数 $f(x)=x^2-ax+8$ 的最大值是__________.

14. 若实数 a,b 满足 $0<a<b<1$,则

$$f(x)=|x-\log_a b|+\left|x-\log_a \frac{1}{b}\right|+\left|x-\log_b \frac{1}{b}\right|$$

的最小值是__________.

15. 已知三角形三个内角的度数成首项、公比均是整数的等比数列,则公比的值等于__________.

16. Suppose m is integer, if $\boldsymbol{a}=(4,m)$, $\boldsymbol{b}=(-2m,4)$, $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$, then the area of the $\triangle OAB$ is __________.

17. 四面体 $ABCD$ 的三组对棱分别相等,长度分别为 $3,4,x$,那么 x 的取值范围是__________.

18. Suppose $x,y\in\mathbf{R}^+$, and $x+y=2$, then the value range for $x^3+2x^2y^2+y^3$ is __________.

19. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq 0,1$,S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和,T_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项的乘积,$T_n(k)$ 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项中除去第 k 项后所剩余的 $n-1$ 项的乘积,即 $T_n(k)=\frac{T_n}{a_k}(n,k\in\mathbf{N}^*, k\leqslant n)$,则数列 $\left\{\frac{S_nT_n}{T_n(1)+T_n(2)+\cdots+T_n(n)}\right\}$ 的前 n 项的和是__________.(用 a_1 和 q 表示)

20. 在 $\sum\limits_{k=1}^{324} k^3$ 的约数中,平方数有__________个.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

求数列 $1, 3+7, 13+21+31, 43+57+73+91, \cdots$ 的第 21 项中的第 12 个数.

22. (本题满分 15 分)

在 $AB=6$,$AD=4$ 的矩形纸片 $ABCD$ 中剪去圆 M 与圆 M',其中圆 M 与 AB、AD 相切,圆 M' 与 BC、CD 相切,且圆 M 与圆 M' 外切,则剩余部分的面积是否有最大值与最小值?若有,求出最值;若没有,请说明理由.

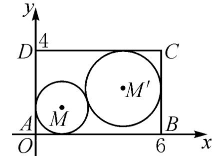

图 3

23. (本题满分 15 分)

已知函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足:

① $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$;

② 当 $x>0$ 时,$f(x)>1$.

解答以下问题:

(1) 求证:$f(x)$ 是增函数;

(2) 若 $f(2012)=6037$,解不等式 $f(a^2-8a+13)<4$.

高一　第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	C	A	B	D	B	A	C	B

题号	11	12	13	14	15
答案	$-18\frac{2}{3}$	$[-7,-4]\cup[1,8]$	8	$\log_a b+1$	1

题号	16	17	18	19	20
答案	40	$(\sqrt{7},5)$	$[4,8)$	$\frac{a_1^2(1-q^n)}{1-q}$	60

21. 49063。

22. 有最小值　$24-(116-64\sqrt{3})\pi$。

23. （1）略。

（2）略。