

第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第 1 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 如果 $a^b = c, c > 0$, 则()
 (A) $b \in \mathbf{R}$. (B) $b \in [0, +\infty)$. (C) $b \in [1, +\infty)$. (D) $b \in (-\infty, -1]$.
2. 若 $x=1, y=0$ 是关于 x 和 y 的方程 $(2m^2 - m + 1)x + (m^2 + 1)y = -4m + 3$ 的一组解, 则实数 m 的值是()
 (A) -2 . (B) $\frac{1}{2}$. (C) -2 或 $\frac{1}{2}$. (D) 2 或 $-\frac{1}{2}$.

3. 若 $\lg 3 = 0.4771$, 则以下四个结论中错误的是()
 (A) $\lg \frac{1}{3} = -0.4771$. (B) $\lg \frac{3}{10} = -0.5229$.
 (C) $\lg 300 = 2.5229$. (D) $\lg \sqrt{99} < 1$.

4. The domain of the function $y = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{\lg x}$ is ()
 (A) $\{x \mid 0 < x < 3\}$. (B) $\{x \mid 0 < x < 3 \text{ and } x \neq 1\}$.
 (C) $\{x \mid 0 < x \leq 3 \text{ and } x \neq 1\}$. (D) $\{x \mid 0 < x \leq 3\}$.

(英汉小词典: domain 定义域)

5. 当正整数 $n > 1$ 时, 若 n^0, n, n^2, \dots, n^n 分别除以 17 所得余数至少有两个相同, 则 n 的最小值是()
 (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.
6. 若周期为 6 的函数 $f(x)$ 在区间 $(-3, 3]$ 内单调递减, 那么在以下的数中, 最大的是()
 (A) $f(8)$. (B) $f(-4.4)$. (C) $f(-7)$. (D) $f(-5\sqrt{2})$.

7. 给出以下四个方程:

(1) $\lg x = 1 - x$; (2) $2^x = \frac{1}{x}$; (3) $2 - x^2 = \lg |x|$; (4) $\sin x = |x|$.

其中, 有唯一解的是()

- (A) (1), (2), (3). (B) (1), (2), (4). (C) (1), (3), (4). (D) (2), (3), (4).

8. 如图 1, $ABCD - EFMN$ 是一个长方体, $\triangle BFN$ 中, $\angle BFN = 90^\circ$, $\angle BNF = 30^\circ$, $BF = m$, 则该长方体体积的最大值是()

- (A) m^3 . (B) $\sqrt{3}m^3$. (C) $\frac{3}{2}m^3$. (D) $3m^3$.

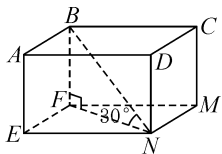


图 1

9. 如果关于 x 的方程 $(x-2)(x^2 - mx + \frac{1}{2}) = 0$ 的三个根是某三角形的三条边的长, 那么, 实数 m 的取值范围是()

- (A) $m > 2$. (B) $2 \leq m \leq \sqrt{6}$. (C) $2 < m \leq \sqrt{6}$. (D) $2 < m < \sqrt{6}$.

10. 已知 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$, 则 $f[\log_2(\log_5 4)] + f[\log_2(\log_4 5)] =$ ()

- (A) 0. (B) 1. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

二、A 组填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 已知函数 $f(x) = e^{|x-a|}$ (a 为常数),若 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数,则 a 的取值范围是_____.

12. 已知 $\odot O$ 和 $\odot P$ 的半径分别是 2 和 3,若 $\odot O, \odot P, \odot M$ 两两相外切,且 $\angle OMP = 90^\circ$,则 $\odot M$ 的半径是_____.

13. 若 $U = \{n \mid n \text{ 是小于 } 37 \text{ 的正偶数}\}, V = \{n \mid n \in U \text{ 且 } n \text{ 有奇数个约数}\}, W = \{n \mid n \in U \text{ 且 } n \text{ 是 } 3 \text{ 的倍数}\}$,则 $V \cap W =$ _____.

14. 设 $a > 0$,且 $a \neq 1$,若函数 $f(x) = a^{\lg(x^2 - 2x + 3)}$ 有最大值,则不等式 $\log_a(x^2 - 5x + 7) > 0$ 的解集是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 4\sqrt{3}, \angle B = 60^\circ$,则 BC 长度的取值范围是_____.

16. 已知集合 $M = \{x \mid x^2 - 4 > 0\}$,集合 $N = \{x \mid x^2 - 6x + a - 4 < 0, x \in \mathbf{Z}\}$,若 $M \cap N$ 有 4 个子集,则实数 a 的取值范围是_____.

17. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - m^2x + n = 0$ 的两个实数根, y_1, y_2 是方程 $y^2 - 3my + 6 = 0$ 的两个实数根,其中 m, n 是常数,且 $x_1 + y_1 = 2, x_2 + y_2 = 2$,则 $8m + n =$ _____.

18. 已知一列数:1,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,2,1,⋯,它的各项若不是 1 就是 2,并且在第 k 个 1 和第 $(k+1)$ 个 1 之间有 $(2k-1)$ 个 2,那么,前 2014 个数的和为_____.

19. 已知 $y = \begin{cases} x - \frac{1}{x} (1 \leq x < 2), \\ x + \frac{16}{x} (2 \leq x \leq 6). \end{cases}$ 则 y 的值域是_____.

20. The radius of the circle O is 2. The chord AB is equal to the chord CD . Both of the distance from the 2 chords to point O are 1. The area range of the quadrilateral $ABCD$ is _____.

(英汉小词典:radius 半径;chord 弦;quadrilateral 四边形)

三、B 组填空题(每小题 8 分,共 40 分.)

21. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + n = 0$ 有两个不同的正整数解,则自然数 $n =$ _____或_____.

22. 已知关于 x 的不等式 $mx^2 + mx - 2 \leq 0$.

(1) 若其解集为 $[-2, 1]$,则实数 $m =$ _____;

(2) 若不等式 $mx^2 + mx - 2 \leq 0$ 在 $[-3, 2]$ 上成立,则实数 $m \in$ _____.

23. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 (x \leq 0), \\ 3x - 2 (x > 0). \end{cases}$ 则 $f(f(-2)) =$ _____;若 $|f(x)| \geq ax$ 在 $x \in [-1, 1]$

上恒成立,则实数 a 的取值范围是_____.

24. 已知 O 是坐标原点,过点 $A(2, 1)$ 的直线与 x 轴正半轴交于点 C ,与 y 轴正半轴交于点 D ,则 $\triangle OCD$ 的面积的最小值是_____,此时 $\triangle OCD$ 的外接圆的面积是_____.

25.	1	2	3	4	5	⋯	n
	3	5	7	9	11	⋯	$(2n-1)$
	8	12	16	20	⋯	$(4n-4)$	
	20	28	36	⋯	$(8n-12)$		

⋯
图 2

观察图 2 呈现的规律,可知

(1) 当 $n = 5$ 时,数表中最下面一行的数是_____;

(2) 数表的最下面一行用 n 表示是_____.

高一 第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	C	C	C	D	B	C	D	A
题号	11		12		13		14		15	
答案	$(-\infty, 1]$		1		$\{36\}$		$(2, 3)$		$(0, 8]$	
题号	16		17		18		19		20	
答案	$[9, 12)$		2		3983		$\left[0, \frac{3}{2}\right) \cup [8, 10]$		$(3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}]$	
题号	21		22		23		24		25	
答案	5, 8		1; $\left[-8, \frac{1}{3}\right]$		4; $[-1, 0]$		4; 5π		48; $(n+1)2^{n-2}$	

