泉州七中2018级高二下数学周练2（命卷人：吴秋生）

班级：　　座号：　　姓名：

一、选择题（每小题10分，共60分）

1. 函数 $f(x)=\left|\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right|$ 的最小正周期是(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

2. (2019湖南衡阳三模)若 $\sin\alpha<0$,则下列三角函数的值恒为负数的是(　　)

A. $\cos\alpha$　　B. $\tan\alpha$　　C. $\cos\frac{\alpha}{2}$　　D. $\tan\frac{\alpha}{2}$

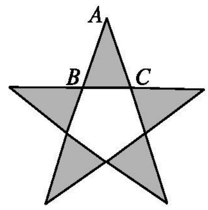
3. 若倾斜角为 α 的直线 l 与曲线 $y=x^4$ 相切于点(1,1),则 $\cos^2\alpha-\sin 2\alpha$ 的值为(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{7}{17}$

4. (2019内蒙古鄂尔多斯高三模拟)黄金三角形有两种,其中底和腰之比为黄金分割比的黄金三角形被认为是最美的三角形,它是顶角为36°的等腰三角形(另一种是顶角为108°的等腰三角形),例如,正五角星由5个黄金三角形和一个正五边形组成,

如图所示,在一个黄金三角形ABC中,$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

根据这些信息,可得 $\sin 234°=$(　　)



A. $\frac{1-2\sqrt{5}}{4}$　　B. $-\frac{3+\sqrt{5}}{8}$　　C. $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　D. $-\frac{4+\sqrt{5}}{8}$

5. (2019河北石家庄期末)设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$,若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$对任意的实数 x 都成立,

则 ω 的最小值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

6. (多选)对于△ABC,有如下命题,其中正确的有(　　)

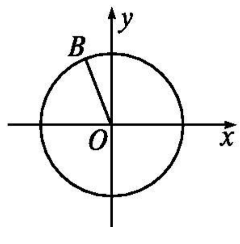
A. 若 $\sin 2A=\sin 2B$,则△ABC为等腰三角形　　B. 若 $\sin A=\cos B$,则△ABC为直角三角形

C. 若$\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C<1$,则△$ABC$为钝角三角形　　D. 若$AB=\sqrt{3}$,$AC=1$,$B=30°$,则△$ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题（每小题10分，共60分）

7. 如图,在平面直角坐标系xOy中,钝角 α 的终边与单位圆交于点B,且点B的纵坐标为$\frac{12}{13}$.

若将点B沿单位圆逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$到达点A,则点A的坐标为__________.



8. 已知$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$,则$\sin\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的值为__________.

9. (2019重庆渝中区二模)已知$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$,若 $\alpha\in(0,\pi)$,则 $\alpha=$__________.

10. (2019江苏无锡一模)已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-a$ 在区间$[0,2\pi]$上恰有三个零点 x_1,x_2,x_3,

则 $x_1+x_2+x_3=$__________.

11. (2019南京建邺区校级期中)若$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1\leqslant m$在$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$上有解,

则实数 m 的最小值为__________.

12. (2019安徽合肥三模)已知函数$f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin x$,

若对任意实数 x,恒有 $f(a_1)\leqslant f(x)\leqslant f(a_2)$,则 $\cos(a_1-a_2)=$__________.

三、解答题（每小题15分，共30分）

13.(2019河南郑州模拟)已知函数$f(x)=4\sqrt{3}\sin x\cos x-4\cos^2x+m$,且$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=7$.

(1)求m的值;

(2)当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,不等式$c<f(x)<2c+15$恒成立,求实数$c$的取值范围.

14.(2019天津和平区二模)已知函数$f(x)=\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)$,$x\in$R.

(1)求$f(x)$的最小正周期和最大值;

(2)讨论$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上的单调性.

泉州七中2018级高二下数学周练2（命卷人：吴秋生）

班级：　　座号：　　姓名：

一、选择题（每小题10分，共60分）

1.函数 $f(x)=\left|\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right|$的最小正周期是(　　)

A.$\frac{\pi}{4}$　　B.$\frac{\pi}{2}$　　C.π　　D.2π

【解析】C　由已知得 $f(x)=\frac{|\sin x|}{2}$,故 $f(x)$的最小正周期为π.

2.(2019湖南衡阳三模)若 $\sin\alpha<0$,则下列三角函数的值恒为负数的是(　　)

A.$\cos\alpha$　　B.$\tan\alpha$　　C.$\cos\frac{\alpha}{2}$　　D.$\tan\frac{\alpha}{2}$

【解析】D　由 $\sin\alpha<0$,得 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+2\pi(k\in Z)$,

因此 $k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\pi(k\in Z)$,即$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限角,

因此 $\tan\frac{\alpha}{2}<0$.故选D.

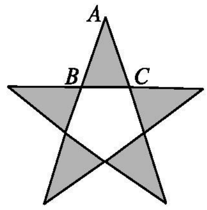
3.若倾斜角为α的直线 l 与曲线 $y=x^4$ 相切于点(1,1),则 $\cos^2\alpha-\sin 2\alpha$ 的值为(　　)

A.$-\frac{1}{2}$　　B.1　　C.$-\frac{3}{5}$　　D.$-\frac{7}{17}$

【解析】D　$y'=4x^3$,当 $x=1$ 时,$y'=4$,则 $\tan\alpha=4$,

$\therefore\cos^2\alpha-\sin 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{7}{17}$,故选D.

4.(2019内蒙古鄂尔多斯高三模拟)黄金三角形有两种,其中底和腰之比为黄金分割比的黄金三角形被认为是最美的三角形,它是顶角为36°的等腰三角形(另一种是顶角为108°的等腰三角形),例如,正五角星由5个黄金三角形和一个正五边形组成,



如图所示,在一个黄金三角形 ABC 中,$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

根据这些信息,可得 $\sin 234°=$(　　)

A.$\frac{1-2\sqrt{5}}{4}$　　B.$-\frac{3+\sqrt{5}}{8}$　　C.$-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　D.$-\frac{4+\sqrt{5}}{8}$

【解析】C　由图可知$\angle ACB=72°$,且 $\cos 72°=\frac{\frac{1}{2}BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.$\therefore\cos 144°=2\cos^2 72°-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

则 $\sin 234°=\sin(144°+90°)=\cos 144°=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.故选C.

5.(2019河北石家庄期末)设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$,若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$对任意的实数 x 都成立,则ω的最小值为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.1

【解析】B　因为 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$对任意的实数 x 都成立,所以三角函数 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{4}$时取最大值,

所以 $\omega\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,其中 k 是整数,

因为 $\omega>0$,所以 $\omega=\frac{2}{3}+8k>0$,

所以 k 是自然数,当 $k=0$ 时,ω取最小值$\frac{2}{3}$.故选B.

6.(多选)对于△ABC,有如下命题,其中正确的有(　　)

A.若 $\sin 2A=\sin 2B$,则△ABC为等腰三角形　　　B.若 $\sin A=\cos B$,则△ABC为直角三角形

C.若 $\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C<1$,则△$ABC$为钝角三角形　　D.若 $AB=\sqrt{3}$,$AC=1$,$B=30°$,则△ABC的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】CD　对于 A:∵$\sin 2A=\sin 2B$,∴$A=B\Rightarrow$△ABC是等腰三角形,

或 $2A+2B=\pi\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$,即△$ABC$是直角三角形.故 A 错误.

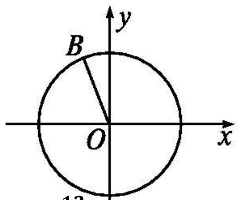
对于 B:∵$\sin A=\cos B$,∴$A-B=\frac{\pi}{2}$或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.∴△ABC不一定是直角三角形.故 B 错误.

对于 C:∵$\sin^2A+\sin^2B<1-\cos^2C=\sin^2C$,∴$a^2+b^2<c^2$.∴△$ABC$为钝角三角形.故 C 正确.

对于 D:由正弦定理,得 $\sin C=\frac{c\cdot\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.而 $c>b$,∴$C=60°$ 或 $C=120°$.∴$A=90°$ 或 $A=30°$.

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$.D 正确.故选 CD.

二、填空题(每小题10分,共60分)



7.如图,在平面直角坐标系 xOy 中,钝角 α 的终边与单位圆交于点 B,且点 B 的纵坐标为$\frac{12}{13}$.若将点 B 沿单位圆逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$到达点 A,则点 A 的坐标为__________.

【解析】　因为在平面直角坐标系 xOy 中,钝角 α 的终边与单位圆交于 B 点,且点 B 的纵坐标为$\frac{12}{13}$,

故 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$,$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$,将点 B 沿单位圆逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$到达 A 点,

点A的坐标为$\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$,即$A(-\sin\alpha,\cos\alpha)$,∴$A\left(-\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$.

8.已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$,则 $\sin\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的值为__________.

【解析】$\sin\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\pi-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]-\cos 2\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$

$=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}+1-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$.

9.(2019 重庆渝中区二模)已知 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$,若 $\alpha\in(0,\pi)$,则 $\alpha=$__________.

【解析】　由 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$得 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}$,得 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$.

得 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$,得 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.∵$\alpha\in(0,\pi)$,

∴$\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$,∴$\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$或 $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,故 $\alpha=\frac{\pi}{6}$或 $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

10.(2019 江苏无锡一模)已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-a$ 在区间$[0,2\pi]$上恰有三个零点 x_1,x_2,x_3,则 $x_1+x_2+x_3=$__________.

【解析】　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=a$,方程的解即为直线与三角函数图象的交点,

在$[0,2\pi]$上,当 $a=\sqrt{3}$时,直线与三角函数图象恰有三个交点,

令 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$,即 $x=2k\pi$,$k\in Z$ 或 $x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$,即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$,$k\in Z$,

∴此时 $x_1=0$,$x_2=\frac{\pi}{3}$,$x_3=2\pi$,

∴$x_1+x_2+x_3=0+\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$.

11. (2019南京建邺区校级期中)若 $\sin x+\sqrt{3}\cos x+1\leqslant m$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上有解，则实数 m 的最小值为__________.

【解析】 令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x+1=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$,

$\because 0\leqslant x\leq\frac{\pi}{2}$, $\therefore\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{6}$, 则 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1\in[2,3]$.

$\because\sin x+\sqrt{3}\cos x+1\leqslant m$ 在 $0\leqslant x\leq\frac{\pi}{2}$ 上有解,

$\therefore$实数 m 的最小值为 2.

12. (2019安徽合肥三模)已知函数 $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin x$,

若对任意实数 x, 恒有 $f(a_1)\leqslant f(x)\leqslant f(a_2)$, 则 $\cos(a_1-a_2)=$__________.

【解析】 $\because f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin x=2\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin x$

$=\cos 2x+\sin x=-2\sin^2x+\sin x+1$,

$\because\sin x\in[-1,1]$, $\therefore f(x)\in\left(-2,\frac{9}{8}\right)$,

对任意实数 x, 恒有 $f(a_1)\leqslant f(x)\leqslant f(a_2)$, 则 $f(a_1)=-2$, $f(a_2)=\frac{9}{8}$,

即 $\sin a_1=-1$, $\sin a_2=\frac{1}{4}$, $\cos a_1=0$,

$\therefore\cos(a_1-a_2)=\cos a_1\cos a_2+\sin a_1\sin a_2=0+\frac{1}{4}\times(-1)=-\frac{1}{4}$.

三、解答题（每小题15分，共30分）

13.(2019河南郑州模拟)已知函数 $f(x)=4\sqrt{3}\sin x\cos x-4\cos^2x+m$,且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=7$.

(1)求 m 的值;

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,不等式 $c<f(x)<2c+15$ 恒成立,求实数 c 的取值范围.

【解析】 (1) $f(x)=4\sqrt{3}\sin x\cos x-4\cos^2x+m=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+m-2=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+m-2$,

由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=7$,可得 $4\sin\frac{\pi}{6}+m-2=7$,可得 $m=7$.

(2)由(1)可得 $f(x)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+5$,

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,

$\therefore -\frac{1}{2}\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$,可得 $3\leqslant f(x)\leqslant 2\sqrt{3}+5$,

由不等式 $c<f(x)<2c+15$ 恒成立,

可得$\begin{cases}c<3,\\2c+15>2\sqrt{3}+5,\end{cases}$解得$\sqrt{3}-5<c<3$,

$\therefore$实数 c 的取值范围为$(\sqrt{3}-5,3)$.

14.(2019天津和平区二模)已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)$,$x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

(2)讨论$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上的单调性.

【解析】 (1)由题意,得 $f(x)=\cos x\sin x-\sqrt{3}\cos^2x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,其最大值为$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)令$z=2x-\frac{\pi}{3}$,

则函数$y=2\sin z$的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$,得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

设$A=\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,$B=\left\{x\left|-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\le\frac{5}{12}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,

易知$A\cap B=\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right]$.

所以,当$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$时,$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right]$上单调递增;在区间$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减.