

泉州七中 2018 级高二下数学期中考试卷

命题人：吴秋生 复核人：林月理

一、选择题

单项选择题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | |x - 4| < 5\}$, 则 $(C_R A) \cap B = (\quad)$

- A. $\{x | -1 < x \leq 3\}$ B. $\{x | -1 \leq x < 3\}$ C. $\{x | -1 \leq x \leq 9\}$ D. $\{x | -1 < x < 9\}$

2. 下列四个命题为说法错误的是 ()

- A. “若 $x^2 + 2x - 3 \neq 0$, 则 $x \neq 1$ ”为真命题;
 B. 命题 $p: \forall x \in R, 2^x > 0$, 则 $\neg p: \exists x_0 \in R, 2^{x_0} \leq 0$;
 C. “ $e^a > e^b$ ”是“ $\ln a > \ln b$ ”的的充要条件.
 D. 命题 $p: \forall x \in [1, +\infty), \lg x \geq 0$ ”, 命题 $q: \exists x \in R, x^2 + x + 1 < 0$, 则 $p \vee q$ 为真命题

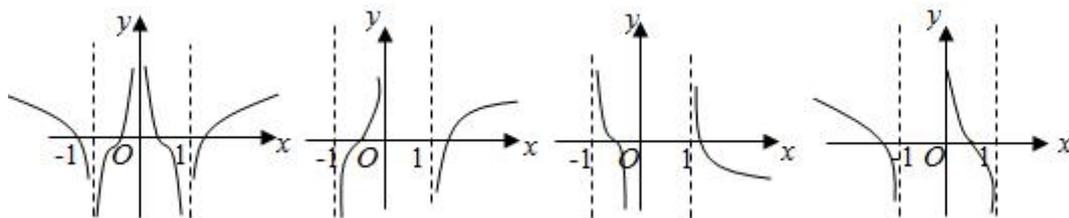
3. 已知 $a = 0.5^{0.4}$, $b = 0.4^{0.4}$, $c = 0.4^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小关系为()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

4. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $[m, 2m]$ 上的值域为 $[m, 2m]$, 则 $m = (\quad)$

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{16}$ 或 $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{4}$ 或 2

5. 函数 $f(x) = \lg\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的图象大致是 ()



- A. B. C. D.

6. 若函数 $f(x) = e^x - e^{-x} + \sin 2x$, 则满足 $f(2x^2 - 1) + f(x) > 0$ 的 x 的取值范围为 ()

- A. $(-1, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{2}, 1)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

7. 6 件产品中有 4 件合格品, 2 件次品, 为找出这 2 件次品, 每次任取一个检验, 检验后不放回, 则恰好在第四次检验后找出所有次品的概率为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{3}{5}$

8. 若两个正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 2$, 且不等式 $x + \frac{y}{4} < m^2 + m$ 有解, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-2, 1)$

9. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$, 若对任意两个不等的正数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 4$ 恒成立,

则 a 的取值范围为 ()

- A. $(4, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

10. 已知函数 $f(x)$ 满足当 $x \leq 0$ 时, $f(x-2) = f(x)$, 且当 $x \in (-2, 0]$ 时, $f(x) = |x+1| - 1$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点恰好有 3 对, 则 a 的取值范围是 ()

- A. (3,5) B. (3,4) C. (1,5) D. (3, +∞)

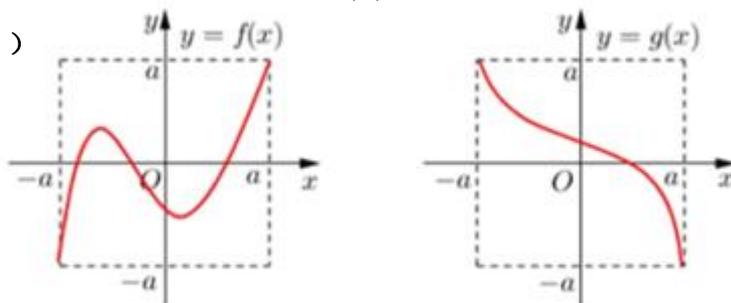
多项选择题: 本题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。不选或选出的选项中含有错误选项得 0 分, 只选出部分正确选项得 3 分, 选出全部正确选项得 5 分。

11. 下列说法正确的有 ()

- A. 两个随机变量的线性相关性越强, 则相关系数 r 的绝对值越接近于 0.
 B. $E(2X+1) = 2E(X)+1$, $D(2X+1) = 4D(X)+1$.
 C. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$, 若 $P(\xi > 1) = p$, 则 $P(-1 < \xi < 1) = 1-2p$
 D. 甲、乙、丙、丁 4 个人到 4 个景点旅游, 每人只去一个景点, 设事件 $A =$ “4 个人去的景点各不相同”, 事件 $B =$ “甲独自去一个景点”, 则 $P(A|B) = \frac{2}{9}$

12. 定义域和值域均为 $[-a, a]$ (常数 $a > 0$) 的函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像如图所示,

则下列说法正确的有 ()



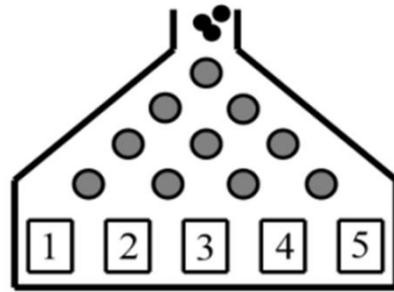
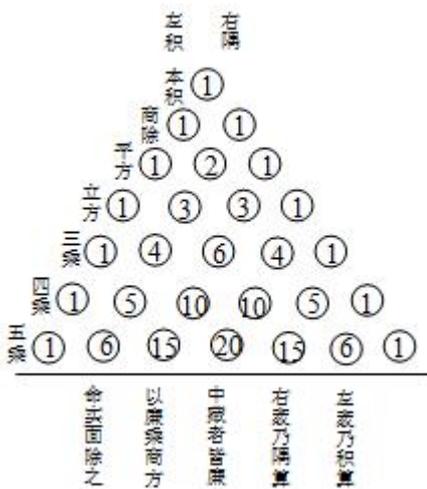
- A. 方程 $f(g(x)) = 0$ 有两正数解和一负数解 B. 方程 $g(f(x)) = 0$ 最多只有三个解
 C. 方程 $f(f(x)) = 0$ 可能存在五个解 D. 方程 $g(g(x)) = 0$ 有且仅有一个解.

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。其中第 15, 16 题为双空题, 第一空 2 分, 第二空 3 分。将答案填在答题卡的相应位置。

13. 函数 $y = \log_3(-x^2 + 4x)$ 的增区间是_____.

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \\ 3x - y - 5 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 20$ 的最小值为_____.

15. 11 世纪中叶, 中国数学家贾宪给出了直到六次幂的二项式系数表, 如图所示是《杨辉详解九章算法》开方作法本原, 其中第 i 层即为 $(a+b)^{i-1}$ 展开式的系数. 贾宪称整张数表为“开放作法本原”, 今称“贾宪三角”但贾宪未给出二项式系数的一般公式, 因而未能建立一般正整数次幂的二项式定理. 贾宪的数学著作已失传, 13 世纪数学家杨辉在《详解九章算法》(1261) 中引用了开放作法本原图, 注明此图出“《释锁算数》, 贾宪用此术”, 因而流传至今. 只是后人往往因此把它误称为“杨辉三角”. $(ax-1)^6$ 展开式中 x^3 的系数为 -160 , ①则实数 a 的值为_____, ②展开式中各项系数之和为_____.



16. 如图，高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计的用来研究随机现象的模型，它是在一块竖起的木板上钉上一排排互相平行，水平间隔相等的圆柱形铁钉，并且每一排的钉子数目都比上一排多一个，一排中各个钉子恰好对准上面一排两相邻铁钉的正中央，从入口处放入一个直径略小于两颗钉子间隔的小球，当小球从两钉之间的间隙下落时，由于碰到下一排铁钉，它将以相等的可能性向左或向右落下，接着小球再通过两钉的间隙，又碰到下一排铁钉，如此继续下去，在最底层的5个出口处各放置一个容器接住小球，那么，小球落入1号容器的概率是_____，若取8个小球进行试验，设其中落入3号容器的小球个数为 ξ ，则 ξ 的数学期望是_____.

17. 设 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，满足 $f(2-x) = f(2+x)$ ，且当 $0 \leq x \leq 2$ 时， $f(x) = xe^x$ ，
则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2020) =$ _____.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^{|\ln x|}}$ ，若关于 x 的方程 $f^2(x) - mf(x) + 1 = 0$ 恰好有四个不相等的实数根，
则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共5题，每题12分，共60分。
解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

19. 已知函数 $f(x) = e^x \cos x - x$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

【解析】

20. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = \frac{-4^x + b}{4^{x+1} + a}$ 是奇函数.

- (1) 求 a, b 的值；
- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) + m = 0$ 有正根，求实数 m 的取值范围；

【解析】

21. 截至 2019 年, 由新华社《瞭望东方周刊》与瞭望智库共同主办的"中国最具幸福感城市"调查推选活动已连续成功举办 12 年, 累计推选出 60 余座幸福城市, 全国约 9 亿多人参与调查, 使"城市幸福感"概念深入人心. 为了便于对某城市的"城市幸福感"指数进行研究, 现从该市抽取若干人进行调查, 绘制成如下不完整的 2×2 列联表(数据单位: 人).

| | 男 | 女 | 总计 |
|------|---|----|----|
| 非常幸福 | | 11 | 15 |
| 比较幸福 | | 9 | |
| 总计 | | | 30 |

- (1) 将列联表补充完整, 并据此判断是否有 90% 的把握认为城市幸福感指数与性别有关;
 (2) 若感觉"非常幸福"记 2 分, "比较幸福"记 1 分, 从上表男性中随机抽取 3 人, 记 3 人得分之和为 ξ , 求 ξ 的分布列, 并根据分布列求 $\xi \leq 4$ 的概率

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

| | | | | |
|-------------------|-------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.10 | 0.05 | 0.010 | 0.001 |
| k_0 | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

【解析】

22. 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x}, a \neq 0$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;
 (2) 若不等式 $f(x) \leq 1 - \frac{1}{x}$ 恒成立, 求 a 的值.

【解析】

23. “爱国，是人世间最深层、最持久的情感，是一个人立德之源、立功之本。”在中华民族几千年绵延发展的历史长河中，爱国主义始终是激昂的主旋律。爱国汽车公司拟对“东方红”款高端汽车发动机进行科技改造，根据市场调研与模拟，得到科技改造投入 x （亿元）与科技改造直接收益 y （亿元）的统计数据如下：

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|------|----|------|----|----|
| x | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| y | 13 | 22 | 31 | 42 | 50 | 56 | 58 | 68.5 | 68 | 67.5 | 66 | 66 |

当 $0 < x \leq 17$ 时，建立了 y 与 x 的两个回归模型：模型①： $\hat{y} = 4.1x + 11.8$ ；模型②： $\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4$ ；

当 $x > 17$ 时，确定 y 与 x 满足的线性回归方程为： $\hat{y} = -0.7x + a$ 。

- (1) 根据下列表格中的数据，比较当 $0 < x \leq 17$ 时模型①、②的相关指数 R^2 ，并选择拟合精度更高、更可靠的模型，预测对“东方红”款汽车发动机科技改造的投入为 17 亿元时的直接收益。

| 回归模型 | 模型① | 模型② |
|------------------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 回归方程 | $\hat{y} = 4.1x + 11.8$ | $\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4$ |
| $\sum_{i=1}^7 (y_i - \hat{y}_i)^2$ | 182.4 | 79.2 |

(附：刻画回归效果的相关指数 $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ ， $\sqrt{17} = 4.1$.)

- (2) 为鼓励科技创新，当科技改造的投入不少于 20 亿元时，国家给予公司补贴收益 10 亿元，

以回归方程为预测依据，比较科技改造投入 17 亿元与 20 亿元时公司实际收益的大小；

(附：用最小二乘法求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + a$ 的系数公式 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ； $a = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$)

- (3) 科技改造后，“东方红”汽车发动机的热效率 X 大幅提高， X 服从正态分布 $N(0.52, 0.01^2)$ ，公司对改造团队的奖励方案如下：若发动机的热效率不超过 50%，不予奖励；若发动机的热效率超过 50% 但不超过 53%，每台发动机奖励 2 万元；若发动机的热效率超过 53%，每台发动机奖励 5 万元。
求每台发动机获得奖励的数学期望。

(附：随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544$)

泉州七中 2018 级高二下数学期中考试卷参考答案

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| A | C | D | D | B | B | C | B | D | A | CD | ABCD |

13. $(0,2)$ 14. $\frac{5}{2}$ 15. $2:1$ 16. $\frac{1}{16}; 3$ 17. $2e+2e^2$ 18. $(2,+\infty)$

19. 【解析】

(1) 因为 $f(x) = e^x \cos x - x$, 所以 $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1, f'(0) = 0$.

又因为 $f(0) = 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 1$.

(2) 设 $h(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$, 则 $h'(x) = e^x (\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

所以对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 有 $h(x) < h(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f(0) = 1$, 最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

20. 【解析】

(1) 由题意: $f(0) = 0$, 解得 $b = 1$,

再由 $f(1) = -f(-1)$, 得 $\frac{-4+1}{4^2+a} = -\frac{-4^{-1}+1}{4^0+a}$, 解得 $a = 4$,

当 $a = 4, b = 1$ 时, $f(x) = \frac{-4^x+1}{4^{x+1}+4}$, 定义域为 \mathbf{R} ,

$$f(-x) = \frac{-4^{-x}+1}{4^{-x+1}+4} = \frac{-1+4^x}{4+4^{x+1}} = -f(x), \text{ 有 } f(x) \text{ 为奇函数,}$$

所以 $a = 4, b = 1$.

(2) $m = -f(x) = \frac{4^x-1}{4^{x+1}+4} = \frac{4^x+1-2}{4(4^x+1)}$, 即 $m = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(4^x+1)}$

当 $x > 0$ 时, $4^x + 1 > 2$, $0 < \frac{1}{2(4^x+1)} < \frac{1}{4}$, 所以 $0 < \frac{1}{4} - \frac{1}{2(4^x+1)} < \frac{1}{4}$,

因为 $m = -f(x)$ 有正根, 所以 $m \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

21. 【解析】

(1) 表格如下所示:

| | | | |
|------|----|----|----|
| | 男 | 女 | 总计 |
| 非常幸福 | 4 | 11 | 15 |
| 比较幸福 | 6 | 9 | 15 |
| 总计 | 10 | 20 | 30 |

$$\text{因为 } K^2 = \frac{30 \times (4 \times 9 - 11 \times 6)^2}{15 \times 15 \times 10 \times 20} = 0.6 < 2.706$$

所以没有 90% 的把握认为城市幸福感指数与性别有关

(2) 由题可知, ξ 的可能取值有 3, 4, 5, 6, 则

$$P(\xi=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, \quad P(\xi=4) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, \quad P(\xi=5) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, \quad P(\xi=6) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

所以 ξ 的分布列为

| | | | | |
|-----|---------------|---------------|----------------|----------------|
| | 3 | 4 | 5 | 6 |
| P | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

$$\text{所以 } P(\xi \leq 4) = P(\xi=3) + P(\xi=4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

22. 【解析】

$$(1) a=1 \text{ 时, } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0, \text{ 解得 } x=e.$$

| | | | |
|---------|----------|-----|----------------|
| x | $(0, e)$ | e | $(e, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 单调递增 | 极大值 | 单调递减 |

可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, e)$, 单调递减区间为 $(e, +\infty)$,

可得极大值为 $f(e) = \frac{1}{e}$, 无极小值.

(2) 由题意可得: $x > 0$, 由不等式 $f(x) \leq 1 - \frac{1}{x}$ 恒成立, 即 $x - 1 - a \ln x \geq 0$ 恒成立.

令 $g(x) = x - 1 - a \ln x \geq 0, g(1) = 0, x \in (0, +\infty)$.

$$g'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x - a}{x}.$$

①若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(1) = 0$,

$\therefore x \in (0, 1)$ 时, $g(x) < 0$, 不符合题意, 舍去.

②若 $0 < a < 1$, 则函数 $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, 即函数 $g(x)$ 单调递增, 又 $g(1) = 0$,

$\therefore x \in (a, 1)$ 时, $g(x) < 0$, 不符合题意, 舍去.

③若 $a = 1$, 则函数 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, 即函数 $g(x)$ 单调递增,

$x \in (a, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减.

$\therefore x = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极小值即最小值, 又 $g(1) = 0$,

$\therefore x > 0$ 时, $g(x) \geq 0$ 恒成立.

③若 $1 < a$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上 $g'(x) < 0$, 即函数 $g(x)$ 单调递减, 又 $g(1) = 0$,

$\therefore x \in (1, a)$ 时, $g(x) < 0$, 不符合题意, 舍去.

综上所述可得: $a = 1$.

23. 【解析】

(1) 由表格中的数据, 有 $182.4 > 79.2$, 即 $\frac{182.4}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} > \frac{79.2}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}$,

所以模型①的 R^2 小于模型②, 说明回归模型②刻画的拟合效果更好.

所以当 $x = 17$ 亿元时, 科技改造直接收益的预测值为

$$\hat{y} = 21.3 \times \sqrt{17} - 14.4 = 21.3 \times 4.1 - 14.4 = 72.93 \text{ (亿元)}.$$

(2) 由已知可得: $\bar{x} - 20 = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, 所以 $\bar{x} = 23$.

$$\bar{y} - 60 = \frac{8.5+8+7.5+6+6}{5} = 7.2, \text{ 所以 } \bar{y} = 67.2.$$

$$\text{所以 } a = \bar{y} + 0.7\bar{x} = 67.2 + 0.7 \times 23 = 83.3.$$

所以当 $x > 17$ 亿元时, y 与 x 满足的线性回归方程为: $\hat{y} = -0.7x + 83.3$.

所以当 $x = 20$ 亿元时, 科技改造直接收益的预测值 $\hat{y} = -0.7 \times 20 + 83.3 = 69.3$.

所以当 $x = 20$ 亿元时, 实际收益的预测值为 $69.3 + 10 = 79.3$ 亿元 > 72.93 亿元.

所以技改造投入 20 亿元时, 公司的实际收益的更大.

(3) 因为 $P(0.52 - 0.02 < X < 0.52 + 0.02) = 0.9544$,

$$\text{所以 } P(X > 0.50) = \frac{1+0.9544}{2} = 0.9772, \quad P(X \leq 0.50) = \frac{1-0.9544}{2} = 0.0228,$$

因为 $P(0.52 - 0.01 < X < 0.52 + 0.01) = 0.6826$,

$$\text{所以 } P(X > 0.53) = \frac{1-0.6826}{2} = 0.1587,$$

$$\text{所以 } P(0.50 < X \leq 0.53) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8185.$$

设每台发动机获得的奖励为 Y (万元), 则 Y 的分布列为:

| | | | |
|-----|--------|--------|--------|
| Y | 0 | 2 | 5 |
| P | 0.0228 | 0.8185 | 0.1587 |

所以每台发动机获得奖励的数学期望为

$$E(Y) = 0 \times 0.0228 + 2 \times 0.8185 + 5 \times 0.1587 = 2.4305 \text{ (万元)}.$$