泉州七中2021届高三毕业班周练19

一、选择题（本大题共8小题，共40.0分）

1. 已知复数 $z=\frac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则共轭复数$\bar{z}$在复平面对应的点位于( )

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

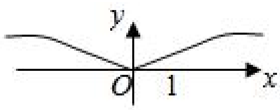
【答案】C

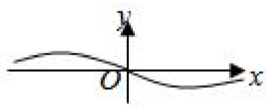
2. 若“$\exists x_0\in[\frac{1}{2},2]$，使得 $2x_0^2-\lambda x_0+1<0$ 成立”是假命题，则实数λ的取值范围为( )

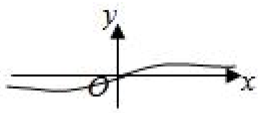
A. $(-\infty,2\sqrt{2}]$　　B. $[2\sqrt{2},3]$　　C. $[-2\sqrt{2},3]$　　D. $\lambda=3$

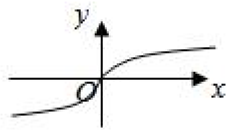
【答案】A

3. 函数 $f(x)=\frac{x}{e^x+e^{-x}}$的大致图象是( )

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

4. 已知$5^5<8^4$，$13^4<8^5$.设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13}8$，则( )

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】A

5. 五名志愿者到三个不同的单位去进行帮扶，每个单位至少一人，则甲、乙两人不在同一个单位的概率为( )

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{13}{25}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{19}{25}$

【答案】D

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$, $A(\frac{1}{3},0)$为 $f(x)$图象的对称中心，B，C 是该图象上相邻的最高点和最低点，若 $BC=4$，则 $f(x)$的单调递增区间是( )

A. $(2k-\frac{2}{3},2k+\frac{4}{3})$，$k\in Z$　　B. $(2k\pi-\frac{2}{3}\pi,2k\pi+\frac{4}{3}\pi)$，$k\in Z$

C. $(4k-\frac{2}{3},4k+\frac{4}{3})$，$k\in Z$　　D. $(4k\pi-\frac{2}{3}\pi,4k\pi+\frac{4}{3}\pi)$，$k\in Z$

【答案】C

7. 已知 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，$f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数且在$[0,+\infty)$上 $f'(x)<1$，若 $f(2020-m)-f(m)\geq 2020-2m$，则实数 m 的取值范围为

A. $[-1010,1010]$　　B. $[1010,+\infty)$

C. $(-\infty,-1010]$　　D. $(-\infty,-1010]\cup[1010,+\infty)$

【答案】B

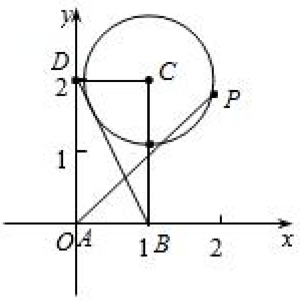
8. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上.若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda+\mu$的最大值为(　)

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

【答案】A

【解答】

解：如图：以 A 为原点，以 AB，AD 所在的直线为 x，y 轴，建立如图所示的坐标系，



则 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$D(0,2)$，$C(1,2)$，

∵动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，

设圆的半径为 r，

$\because BC=2$，$CD=1$，$\therefore BD=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot CD=\frac{1}{2}BD\cdot r$，

$\therefore r=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

∴圆的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$，

设点 P 的坐标为$(\frac{2\sqrt{5}}{5}cos\theta+1,\frac{2\sqrt{5}}{5}sin\theta+2)$，

$\because \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，

$\therefore (\frac{2\sqrt{5}}{5}cos\theta+1,\frac{2\sqrt{5}}{5}sin\theta+2)=\lambda(1,0)+\mu(0,2)=(\lambda,2\mu)$，

$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{5}cos\theta+1=\lambda$，$\frac{2\sqrt{5}}{5}sin\theta+2=2\mu$，

$\therefore \lambda+\mu=\frac{2\sqrt{5}}{5}cos\theta+\frac{\sqrt{5}}{5}sin\theta+2=\sin(\theta+\varphi)+2$，其中 $tan\varphi=2$，

$\because -1 \leq \sin(\theta+\varphi) \leq 1$，

$\therefore 1 \leq \lambda+\mu \leq 3$，

故$\lambda+\mu$的最大值为 3，

故选 A.

二、不定项选择题（本大题共 4 小题，共 16.0 分）

9. 已知由样本数据点集合$\{(x_i,y_i)|i=1,2,\cdots,n\}$，求得的回归直线方程为$\hat{y}=1.5x+0.5$，且$\overline{x}=3$，现发现两个数据点$(1.2,2.2)$和$(4.8,7.8)$误差较大，去除后重新求得的回归直线 l 的斜率为 1.2，则(　　)

A. 变量 x 与 y 具有正相关关系

B. 去除后的回归方程为$\hat{y}=1.2x+1.4$

C. 去除后 y 的估计值增加速度变快

D. 去除后相应于样本点$(2,3.75)$的残差为 0.05

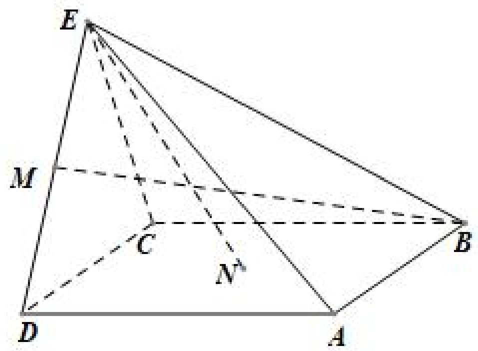
【答案】AB

10. 已知圆 C：$(x+1)^2+(y-4)^2=m$ 和两点 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，若圆上存在点 P，使得$|PA|=2|PB|$，则 m 的值可能为

A. 48　　　　B. 10　　　　C. 25　　　　D. 8

【答案】ABC

11. 如图所示，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，$\triangle CDE$ 是边长为 2 的正三角形，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，M 为线段 DE 的中点，$BC\perp DE$ 则下列结论正确的是(　)



A. 直线 BM 与 EN 是异面直线

B. 线段 BM 与 EN 的长度不相等

C. 直线 $DE\perp$平面 ACM

D. 直线 EA 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】BD

解：对于 A 选项，连接 BD，易知 $BM \subset$平面 BDE，$EN \subset$平面 BDE，所以直线 BM 和 EN 共面，A 项错误；

对于 B 选项，设 CD 的中点为 F，连接 EF、FN，则 $EF \perp CD$，

$\because BC \perp CD$，$BC \perp DE$，$CD \cap DE = D$，

$\therefore BC \perp$平面 CDE，

$\because BC \subset$平面 $ABCD$，

$\therefore$平面 $ABCD \perp$平面 CDE，

$\because$平面 $ABCD \cap$平面 $CDE = CD$，$EF \subset$平面 CDE，

$\therefore EF \perp$平面 $ABCD$，

$\because FN \subset$平面 $ABCD$，$\therefore EF \perp FN$，

$\because F$、N 分别为 CD、BD 的中点，则 $FN = \frac{1}{2}BC = 1$，

又 $EF = \sqrt{CE^2 - CF^2} = \sqrt{3}$，故 $EN = \sqrt{EF^2 + FN^2} = 2$，$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{7}$，$BM \neq EN$，故 B 项正确；

对于 C 选项，由于 $BC \perp$平面 CDE，故 $AD \perp$平面 CDE，故 $AD \perp DE$，所以 $DE \perp AM$ 不满足，所以直线 $DE \perp$平面 ACM 不成立，故 C 选项错误；

对于 D 选项，设 EA 与平面 $ABCD$ 所成的角为θ，则$\theta = \angle EAF$，则 $\sin\theta = \frac{EF}{EA} = \frac{\sqrt{6}}{4}$，故 D 选项正确.

故选：BD.

12. 已知抛物线 C：$y = \frac{1}{4}x^2$，过焦点 F 的直线交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$两点，直线 AO,BO 分别于直线 m: $y =- 2$ 相交于 M,N 两点.则下列说法正确的是(　　)

A. 焦点 F 的坐标为(0,2)

B. $y_1y_2 = 1$

C. $|\overrightarrow{FA}| \cdot |\overrightarrow{FB}|$的最小值为 4

D. △AOB 与△MON 的面积之比为定值

【答案】BCD

解：由题意知抛物线方程为$x^2=4y$，其焦点坐标为$(0,1)$，故 A 错误；

显然直线 AB 的斜率存在，设斜率为 k，则直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，

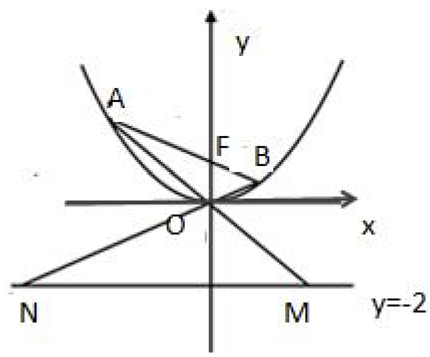
联立$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$，消去 x 得到$y^2-(2+4k^2)y+1=0$，

$\Delta=16k^4+16k^2\geqslant 0$，$y_1+y_2=2+4k^2$，$y_1y_2=1$，故 B 正确；

由抛物线性质知$|\overrightarrow{FA}|=y_1+1, |\overrightarrow{FB}|=y_2+1$，

则$|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|=(y_1+1)(y_2+1)=y_1y_2+(y_1+y_2)+1=4+4k^2\geqslant 4$，

当且仅当 $k=0$ 时，$|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|$取得最小值为 4，故 C 正确；



显然$\angle AOB=\angle MON$，

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta MON}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}\cdot|OM|\cdot|ON|\cdot\sin\angle MON}=\frac{|OA|\cdot|OB|}{|OM|\cdot|ON|}=\frac{y_1}{2}\cdot\frac{y_2}{2}=\frac{y_1y_2}{4}=\frac{1}{4}(\text{定值})，$$

故 D 正确．

故选 BCD．

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则$a_1a_2\cdots a_n$的最大值为__________．

【答案】64

14. 若$(1+2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则$a_0+a_1+a_3+a_5=$________．

【答案】365

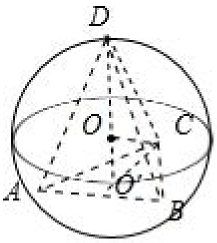
15. 设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，△ABC 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为________．

【答案】$18\sqrt{3}$

解：设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times AB^2\times sin60^\circ=9\sqrt{3}$，解得 $AB=6$，

球心为 O，三角形 ABC 的外心为 O'，显然 D 在 $O'O$ 的延长线与球的交点如图：



$O'C=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=2\sqrt{3}$，$OO'=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$，

则三棱锥 $D-ABC$ 高的最大值为：6，

则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为：$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^3=18\sqrt{3}$.

故答案为：$18\sqrt{3}$.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为 A，左焦点为F_1，延长 AF_1与椭圆交于点 B，若以 AB 为直径的圆经过椭圆的右焦点F_2，则椭圆的离心率为________.

【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}$

解：根据题意，$|AF_1|=|AF_2|=a$，

设$|BF_1|=x$，则$|BF_2|=2a-x$，

又以 AB 为直径的圆经过椭圆的右焦点F_2，

则 $AF_2\perp BF_2$，

则有$|AF_2|^2+|BF_2|^2=|AB|^2$，

即$a^2+(2a-x)^2=(a+x)^2$，解得 $x=\frac{2}{3}a$，

则$|BF_2|=\frac{4}{3}a$，

则 $\tan\angle BAF_2=\frac{|BF_2|}{|AF_2|}=\frac{\frac{4}{3}a}{a}=\frac{4}{3}$，$\tan\angle OAF_2=\frac{|OF_2|}{|OA|}=\frac{c}{b}$，

由$\angle BAF_2=2\angle OAF_2$，

可得 $\tan\angle BAF_2=\tan 2\angle OAF_2=\frac{2\tan\angle OAF_2}{1-\tan^2\angle OAF_2}=\frac{\frac{2c}{b}}{1-\frac{c^2}{b^2}}=\frac{4}{3}$①，

又$a^2=b^2+c^2$②，$e=\frac{c}{a}$③，联立①②③解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故答案为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.