泉州七中 2020 级高一上学期数学周练（5 答案） 2020-12-18

单项选择：1-5：BDBAD　6-8：CAB

多项选择：9-12：AC　　BCD　　ABD　　AC

填空题：13、$\left\{-\frac{5\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$　　14、$-\sqrt{3}$　　15、$\ln\frac{5}{4}, 40$

16、$(\frac{1-\sqrt{3}}{16}, 0)$　　17、$(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$

18．已知幂函数 $f(x)=x^{(m^2+m)^{-1}}$ $(m\in\mathbf{N}^*)$.

(1)试确定该函数的定义域，并指明该函数在其定义域上的单调性；

(2)若函数 $f(x)$的图象经过点$(2，\sqrt{2})$，试确定 m 的值，并求满足条件 $f(2-a)>f(a-1)$的实数 a 的取值范围.

解　(1)因为 $m^2+m=m(m+1)(m\in\mathbf{N}^*)$，

而 m 与 $m+1$ 中必有一个为偶数，所以 m^2+m 为偶数，

所以函数 $f(x)=x^{(m^2+m)^{-1}}$ $(m\in\mathbf{N}^*)$的定义域为$[0，+\infty)$，并且该函数在$[0，+\infty)$上为增函数.

(2)因为函数 $f(x)$的图象经过点$(2，\sqrt{2})$，所以$\sqrt{2}=2^{(m^2+m)^{-1}}$，即 $2^{\frac{1}{2}}=2^{(m^2+m)^{-1}}$，

所以 $m^2+m=2$，解得 $m=1$ 或 $m=-2$.又因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m=1$，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，

又因为 $f(2-a)>f(a-1)$，所以$\begin{cases}2-a\geqslant 0,\\ a-1\geqslant 0,\\ 2-a>a-1,\end{cases}$　解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$,

故函数 $f(x)$的图象经过点$(2，\sqrt{2})$时，$m=1$.满足条件 $f(2-a)>f(a-1)$的实数 a 的取值范围为$[1，\frac{3}{2})$.

19.我国是世界上人口最多的国家，1982 年十二大，计划生育被确定为基本国策.实行计划生育，严格控制人口增长，坚持少生优生，这是直接关系到人民生活水平的进一步提高，也是造福子孙后代的百年大计.

（1）据统计 1995 年底，我国人口总数约 12 亿，如果人口的自然年增长率控制在 1%，到 2020 年底我国人口总数大约为多少亿（精确到亿）；

（2）当前，我国人口发展已经出现转折性变化，2015 年 10 月 26 日至 10 月 29 日召开的党的十八届五中全会决定，坚持计划生育的基本国策，完善人口发展战略，全面实施一对夫妇可生育两个孩子政策，积极开展应对人口老龄化行动.这是继 2013 年，十八届三中全会决定启动实施“单独二孩”政策之后的又一次

人口政策调整.据统计2015年中国人口实际数量大约14亿，若实行全面两孩政策后，预计人口年增长率实际可达1%，那么需经过多少年我国人口可达16亿.

（参考数字：$1.01^{25}\approx 1.2824$，$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 7\approx 0.8451$，$\lg 1.01\approx 0.0043$）

【解析】（1）由1995年底到2020年底，经过25年，由题知，到2020年底我国人口总数大约为

$12\times (1+1\%)^{25}\approx 12\times 1.2824\approx 15$（亿）;

（2）设需要经过x年我国人口可达16亿，由题知$14\times (1+1\%)^{x}=16$，两边取对数得，

$\lg 14+x\lg 1.01=\lg 16$，即有$x=\dfrac{\lg 16-\lg 14}{\lg 1.01}=\dfrac{3\lg 2-\lg 7}{\lg 1.01}\approx \dfrac{3\times 0.3010-0.8451}{0.0043}\approx 14$，则需要经过14年我国人口可达16亿.

20.定义在$(0,+\infty)$的函数$f\left(x\right)$满足：①当$x>1$时，$f\left(x\right)<-2$；②对任意x，$y\in (0,+\infty)$，总有$f(xy)=f(x)+f(y)+2$.

（1）求出$f\left(1\right)$的值；

（2）解不等式$f\left(x\right)+f\left(x-1\right)>-4$；

（3）写出一个满足上述条件的具体函数（不必说明理由，只需写出一个就可以）.

【解析】（1）令$x=y=1$，则$f\left(1\right)=f\left(1\right)+f\left(1\right)+2$，所以$f\left(1\right)=-2$；

（2）令$y=\dfrac{1}{x}$，$x>1$，则有$f\left(1\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+2$，所以$f\left(y\right)=-4-f\left(x\right)$；又因为$x>1$时，$f\left(x\right)<-2$，所以$f\left(y\right)>-2$；而$f\left(x\right)+f\left(x-1\right)>-4$可化为$f\left(x\left(x-1\right)\right)-2>-4$，即

$f\left(x\left(x-1\right)\right)>-2$故$\begin{cases}x>0\\x-1>0\\0<x(x-1)<1\end{cases}$，解得$1<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，即$x\in \left(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

（3）由题知$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x-2$.

21.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 满足 $f\left(0\right)=1$，对于任意 $x\in R$， $f(x)\geq -x$，且

$f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 解析式；

（2）讨论方程 $f(x)=|mx-1|(m>0)$ 在区间 $(0,1)$ 上的根个数.

解：（1）由 $f(0)=1$，得 $c=1$，由 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ 可知 $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=-b$

又对于任意 $x\in R$， $f(x)\geq -x$，即 $ax^2+(b+1)x+1\geq 0$ 都成立，所以

$a>0$，$\Delta=(a+1)^2-4a=(a-1)^2\leq 0$，$\therefore a=1$，$b=-1$ 所以 $f(x)=x^2-x+1$.

（2）$\because g(x)=\begin{cases} x^2-(1+m)x+2, x\geq \frac{1}{m} \\ x^2+(m-1)x, x<\frac{1}{m} \end{cases}$，

①当 $0<m<1$ 时，此时 $1<\frac{1}{m}$，$(0,1)\subseteq\left(-\infty,\frac{1}{m}\right)$

考虑 $g(x)=x^2+(m-1)x$，其对称轴为 $x=\frac{1-m}{2}$，此时 $0<\frac{1-m}{2}<\frac{1}{2}<1<\frac{1}{m}$，

所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1-m}{2}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\frac{1-m}{2},1\right)$ 上为增函数，

且 $g(0)=0$，$g\left(\frac{1-m}{2}\right)<0$，$g(1)=m>0$，所以函数 $g(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上有一个根

②当 $m=1$ 时，$\because g(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, x\geq 1 \\ x^2, x<1 \end{cases}$，所以 $g\left(x\right)=0$ 没有根；

③当 $m>1$ 时，此时 $0<\frac{1}{m}<1$，

若 $x\geq\frac{1}{m}$，$g(x)=x^2-(1+m)x+2$，其对称轴为 $x=\frac{m+1}{2}$，

此时$\dfrac{1}{m}<1<\dfrac{m+1}{2}$，所以函数$g(x)$在$\left(\dfrac{1}{m},1\right)$上为减函数；

若$x<\dfrac{1}{m}$，$g(x)=x^2+(m-1)x$其对称轴为$x=\dfrac{1-m}{2}$

此时$\dfrac{1-m}{2}<0<\dfrac{1}{m}$，所以函数$g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$上为增函数

且$g\left(0\right)=0$，$g\left(1\right)=2-m$，

i.若$2-m\geq 0$，即$1<m\leq 2$时，函数$g\left(x\right)=0$在$(0,1)$上没有根；

ii.若$2-m<0$，即$m>2$时，函数$g\left(x\right)=0$在$(0,1)$上有一个根.

综上得，当$0<m<1$或$m>2$时，函数$g\left(x\right)=0$在$(0,1)$上有一个根；

当$1\leq m\leq 2$时，函数$g\left(x\right)=0$在$(0,1)$上没有根.