

解析几何简化运算的几种策略

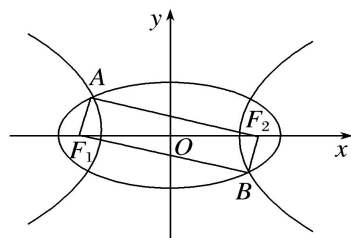
解析几何是通过建立平面直角坐标系，用方程的观点来研究曲线，体现了用代数的方法解决几何问题的优越性.解析几何题目的难度很大程度上体现在运算上.因此，探索减轻运算量的方法和技巧，合理简化解题过程，优化思维过程就成了突破解析几何问题的关键.

技巧一 利用定义，回归本质

波利亚说：“当你不能解决问题时，不妨回到定义中去！”定义是事物本质属性的概括和反映，圆锥曲线许多性质都是由定义派生出来的。对某些圆锥曲线问题，若采用“回归定义”的策略，则能获得题目所固有的本质属性，达到准确判断、灵活解题、避免大量运算的目的。因此，定义是解决问题的原生力量，不容忽视。

例1 如图， F_1, F_2 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，

A, B 分别是 C_1, C_2 在第二、四象限的公共点。若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率是_____。



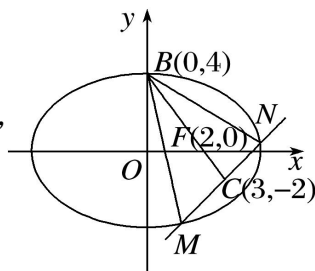
跟踪演练1 (2020·深圳模拟)在平面直角坐标系 xOy 中， P 是椭圆 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ 上的一个动点，点 $A(1,1)$ ， $B(0,-1)$ ，则 $|PA| + |PB|$ 的最大值为_____。

技巧二 设而不求，整体代换

解析几何中的有些问题，若把所涉及的数量全部计算出来再加以解决，有时显得多余而低效。我们经常设出弦的端点坐标不求它，而是结合韦达定理求解，这种方法在有关斜率、中点等问题中常常用到。

例2 已知直线 l 交椭圆 $4x^2 + 5y^2 = 80$ 于 M, N 两点，椭圆与 y 轴的正半轴交于 B 点，若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆的右焦点上，则直线 l 的方程是_____。

跟踪演练2 设椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与函数 $y = \tan \frac{x}{4}$ 的图像相交于 A_1, A_2 两点，若点 P 在椭圆 C 上，且直线 PA_2 的斜率的取值范围是 $[-2, -1]$ ，那么直线 PA_1 的斜率的取值范围是_____。



技巧三 韦达定理，化繁为简

某些涉及线段长度关系的问题可以通过解方程、求坐标，用距离公式计算长度的方法来解；但也可以利用一元二次方程，使相关的点的同名称为方程的根，由根与系数的关系求出两根间的关系或有关线段长度间的关系。后者往往计算量小，解题过程简捷。

例3 (2016·全国甲卷)已知椭圆 $E: \frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点在 x 轴上， A 是椭圆 E 的左顶点，

斜率为 $k(k > 0)$ 的直线交椭圆 E 于 A, M 两点，点 N 在椭圆 E 上， $AM \perp AN$ 。

(1)当 $t = 4$ ， $|AM| = |AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积；(略)

(2)当 $2|AM| = |AN|$ 时，求 k 的取值范围。

跟踪演练3 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 若 $\overline{FA} = 2\overline{BF}$, 则直线 AB 的斜率为_____.

技巧四 平几助力, 事半功倍

解析几何首先是几何问题, 如果在用代数方法研究曲线关系的同时, 充分利用图形本身所具有的平面几何性质, 可得到简捷而优美的解答.

例4 已知直线 $y = kx + 1$ ($k \neq 0$) 交抛物线 $x^2 = 4y$ 于 E, F 两点, 以 EF 为直径的圆被 x 轴截得的弦长为 $2\sqrt{7}$, 则 $k =$ _____.

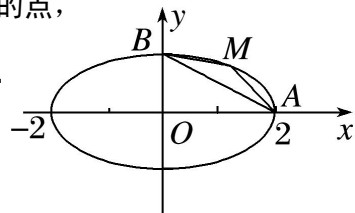
跟踪演练4 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点重合, 抛物线的准线与 x 轴的交点为 K , 点 A 在抛物线上, 且 $AK = \sqrt{2}AF$, 则 $\triangle AFK$ 的面积为_____.

技巧五 巧设参数, 方便计算

换元引参是一种重要的数学方法, 特别是解析几何中的最值问题、不等式问题等, 利用换元引参使一些关系能够相互联系起来, 往往能起到减少变量、简化结构、优化运算的作用.

常见的参数可以选择点的坐标、直线的斜率、直线的倾斜角等. 在换元过程中, 还要注意代换的等价性, 防止扩大或缩小原来变量的取值范围或改变原题条件.

例5 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 M 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上位于第一象限的点, A, B 分别为椭圆 C 的右顶点和上顶点, 则四边形 $OAMB$ 的面积的最大值为_____.



跟踪演练5 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, A, B 是椭圆上的两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0, 0)$, 试求 x_0 的取值范围.

本节课介绍了五种解析几何中常用的减少计算量的方法. 其实, 在解决解析几何问题时, 减少计算量的方法还有很多, 并且不同的题目也会有不同的处理方法, 只要在平时的练习中多实践、多总结, 灵活掌握各种方法, 并且选择适当的方法, 就一定能够以简驭繁, 事半功倍.