准考证号________________ 姓名________________

（在此卷上答题无效）

保密★启用前

泉州七中2021届高三（上）数学周练八（命卷人：林益强）

2020.10

本试卷共22题，满分150分，共5页．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．考生作答时，将答案答在答题卡上．请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效．在草稿纸、试题卷上答题无效．

3．选择题答案使用2B铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用0.5毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚．

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|-x+1\geqslant 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|2x^2-x-1\leqslant 0\right\}$，则 $A\cup B=$

A．$(-\infty,1]$　　B．$[-1,\frac{1}{2}]$　　C．$[-\frac{1}{2},1]$　　D．$[-\frac{1}{2},+\infty)$

2．$(x-1)(x-2)^7$ 的展开式中 x^6 的系数为

A．14　　B．28　　C．70　　D．98

3．已知向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2),\overrightarrow{AC}=(4,-2)$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

A．5　　B．10　　C．25　　D．50

4．平面直角坐标系中，角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $M(-3,4)$，则

$\sin(\pi-2\alpha)=$

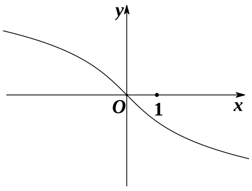
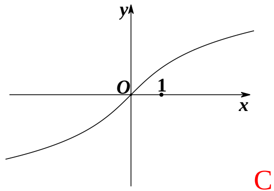
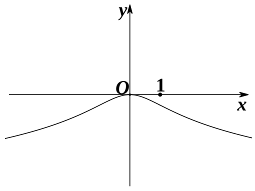
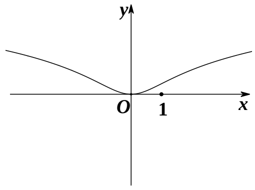
A．$\frac{7}{25}$　　B．$-\frac{7}{25}$　　C．$\frac{24}{25}$　　D．$-\frac{24}{25}$

5．音乐与数学有着密切的联系，我国春秋时期有个著名的“三分损益法”：以“宫”为基本音，“宫”经过一次“损”，频率变为原来的 $\frac{3}{2}$，得到“徵”；“徵”经过一次“益”，频率变为原来的 $\frac{3}{4}$，得到“商”；…….依次损益交替变化，获得了“宫、徵、商、羽、角”五个音阶．据此可推得

A．“宫、商、角”的频率成等比数列　　B．“宫、徵、商”的频率成等比数列

C．“商、羽、角”的频率成等比数列　　D．“徵、商、羽”的频率成等比数列

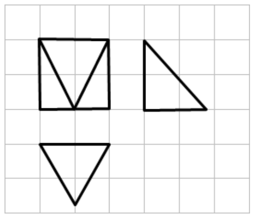
6．函数 $f\left(x\right)=\ln(\sqrt{x^2+1}-kx)$ 的图象不可能是

A．
B．
C．
D．

7．已知 $a=(\sin 2)^2$，$b=2^{\sin 2}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}(\sin 2)$，则

A．$b>c>a$　　B．$b>a>c$　　C．$a>b>c$　　D．$c>b>a$

8．如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，其中俯视图是等边三角形，则该几何体的外接球的表面积为



A．10π　　B．$\dfrac{28}{3}\pi$

C．9π　　D．$\dfrac{25}{3}\pi$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．已知复数 $z=1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$（其中 i 为虚数单位）下列说法正确的是（　　）

A. 复数 z 在复平面上对应的点可能落在第二象限　　B. z 可能为实数

C. $\left|z\right|=2\cos\theta$　　D. $\dfrac{1}{z}$ 的实部为 $\dfrac{1}{2}$

【答案】BCD

【详解】因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $-\pi<2\theta<\pi$，所以 $-1<\cos 2\theta\le 1$，所以 $0<1+\cos 2\theta\le 2$，所以 A 选项错误；

当 $\sin 2\theta=0,\theta=0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，复数 z 是实数，故 B 选项正确；

$\left|z\right|=\sqrt{(1+\cos 2\theta)^2+(\sin 2\theta)^2}=\sqrt{2+2\cos 2\theta}=2\cos\theta$，故 C 选项正确；

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta}=\dfrac{1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta}{(1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta)}=\dfrac{1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta}{2+2\cos 2\theta}$，$\dfrac{1}{z}$ 的实部是 $\dfrac{1+\cos 2\theta}{2+2\cos 2\theta}=\dfrac{1}{2}$，故 D 选项正确；

故选：BCD.

【点睛】本题考查复数的概念，复数的模的计算，复数的运算，以及三角函数的恒等变换公式的应用，属

于中档题.

10．将函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增函数，则实数 ω 可能的取值为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　　　B. 1　　　　C. $\frac{6}{5}$　　　　D. 2

【答案】ABC

【分析】根据图象平移求得函数 $y=g\left(x\right)$ 的解析式，再利用函数的单调性列出不等式求得 ω 的取值范围，即可求解.

【详解】由题意，将函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x\left(\omega>0\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，

得到函数 $y=g\left(x\right)=\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{12}\right)$ 的图象，若函数 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增函数，

则满足 $\begin{cases}-\frac{\omega\pi}{12}\geq-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\omega\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{12}\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $0<\omega\leq\frac{6}{5}$，所以实数 ω 的可能的取值为 $\frac{2}{3},1,\frac{6}{5}$.

故选：ABC.

【点睛】本题主要考查了三角函数的图象变换求函数的解析式，以及三角函数的图象与性质的综合应用，着重考查推理与运算能力，属于基础题.

11．已知函数 $f\left(x\right)$ 对∀x∈R，满足 $f\left(x\right)=-f(6-x),f\left(x+1\right)=f\left(-x+1\right)$，若 $f\left(a\right)=-f(2020),a\in[5,9]$ 且 $f\left(x\right)$ 在 $[5,9]$ 上为单调函数，则下列结论正确的是（　　）

A．$f\left(3\right)=0$　　B．$a=8$　　C．$f\left(x\right)$ 是周期为 4 的周期函数　D．$y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

由条件求得可得 f（x）$=f$（x+8），故周期时 8，再结合给的条件对各个选项进行转化判断即可

∵f（x）对∀x∈**R**，满足 f（x）＝-f（6-x），f（x+1）＝f（-x+1），

∴f（x）＝-f（6-x）＝-f（-（x-5）+1）＝-f（x-5+1）＝-f（x-4），∴f（x-4）＝-f（x），

∴f（x-8）＝f（x-4-4）＝-f（x-4）＝f（x），故 f（x）的周期为 T＝8.

①因为 T＝8，故 C 错；

②f（a）＝-f（2020）＝-f（252×8+4）＝-f（4）＝-f（3+1）＝-f（-2）＝-[-f（6-（-2））]＝f（8），又 a∈[5，9]且 f（x）在[5，9]上单调，易得 a＝8．故 B 对.

③因为：f（x）＝-f（6-x）⇒f（3）＝-f（6-3）＝-f（3）⇒f（3）＝0，A 对，

④∵f（x+1）=f（－x+1），∴x=1为对称轴，故D错．

故选：AB．

本题主要考查抽象函数的性质，求得f（x）=－f（x－4），是解题的关键，属于中档题目．

12．设$\{a_n\}$是无穷数列，若存在正整数k，使得对任意$n\in\mathbf{N}_+$，均有$a_{n+k}>a_n$，则称$\{a_n\}$是间隔递增数列，k是$\{a_n\}$的间隔数，下列说法正确的是（　　）

A. 公比大于1的等比数列一定是间隔递增数列　　B. 已知$a_n=n+\dfrac{4}{n}$，则$\{a_n\}$是间隔递增数列

C. 已知$a_n=2n+(-1)^n$，则$\{a_n\}$是间隔递增数列且最小间隔数是2

D. 已知$a_n=n^2-tn+2020$，若$\{a_n\}$是间隔递增数列且最小间隔数是3，则$4\le t<5$

【答案】BCD

【详解】A. $a_{n+k}-a_n=a_1q^{n+k-1}-a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}\left(q^k-1\right)$，因为$q>1$，所以当$a_1<0$时，$a_{n+k}<a_n$，故错误；

B. $a_{n+k}-a_n=n+k+\dfrac{4}{n+k}-\left(n+\dfrac{4}{n}\right)=k\left(1-\dfrac{4}{(n+k)n}\right)=k\left(\dfrac{n^2+kn-4}{(n+k)n}\right)$，令$t=n^2+kn-4$，t在$n\in\mathbf{N}^*$单调递增，则$t(1)=1+k-4>0$，解得$k>3$，故正确；

C. $a_{n+k}-a_n=2(n+k)+(-1)^{n+k}-\left[2n+(-1)^n\right]=2k+(-1)^n\left((-1)^k-1\right)$，当$n$为奇数时，$2k-(-1)^k+1>0$，存在$k\ge1$成立，当$n$为偶数时，$2k+(-1)^k-1>0$，存在$k\ge2$成立，综上：$\{a_n\}$是间隔递增数列且最小间隔数是2，故正确；

D. 若$\{a_n\}$是间隔递增数列且最小间隔数是3，

则$a_{n+k}-a_n=(n+k)^2-t(n+k)+2020-\left(n^2-tn+2020\right)=2kn+k^2-tk>0$，$n\in\mathbf{N}^*$成立，

则$k^2+(2-t)k>0$，对于$k\ge3$成立，且$k^2+(2-t)k\le0$，对于$k\le2$成立

即$k+(2-t)>0$，对于$k\ge3$成立，且$k+(2-t)\le0$，对于$k\le2$成立

所以$t-2<3$，且$t-2\ge2$

解得$4\le t<5$，故正确.

故选：BCD

【点睛】本题主要考查数列的新定义，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．将答案填在答题卡的相应位置．

13．已知$a+2b=1(a>0,\quad b>0)$，则$\dfrac{2b}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值等于________．

【答案】$2\sqrt{2}+2$

【分析】由$a+2b=1(a>0,b>0)$，代入$\dfrac{2b}{a}+\dfrac{1}{b}$变形，利用基本不等式即可得出．

【详解】解：由题意得$\dfrac{2b}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a+2b}{b}=\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}+2\geqslant 2\sqrt{\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+2=2\sqrt{2}+2$，当且仅当$a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}-1$时等号成立，所以$\dfrac{2b}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为$2\sqrt{2}+2$．

故答案：$2\sqrt{2}+2$

【点睛】本题考查了基本不等式的应用，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

14．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）图象的一个对称中心为$\left(-\dfrac{\pi}{8},0\right)$，一条对称轴为$x=\dfrac{5\pi}{8}$，且$f(x)$的最小正周期大于$2\pi$，则$\varphi=$______．

【详解】

由于函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）图象的一个对称中心为$\left(-\dfrac{\pi}{8},0\right)$，一条对称轴为$x=\dfrac{5\pi}{8}$，且$f(x)$的最小正周期大于$2\pi$，所以$\begin{cases}\sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\omega+\varphi\right)=0\\ \dfrac{5\pi}{8}\omega+\varphi=k_2\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{2\pi}{\omega}>2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{\pi}{8}\omega+\varphi=k_1\pi\\ \dfrac{5\pi}{8}\omega+\varphi=k_2\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 0<\omega<1\end{cases}$，第二个式子减去第一个式子并化简得$\omega=\dfrac{4}{3}\left(k_2-k_1\right)+\dfrac{2}{3}$，由于$0<\omega<1$，所以取$k_1=k_2$，$\omega=\dfrac{2}{3}$，代回第一个式子得$\varphi=k_1\pi+\dfrac{\pi}{8}\times\dfrac{2}{3}=k_1\pi+\dfrac{\pi}{12}$，由于$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，故取$k_1=0$，$\varphi=\dfrac{\pi}{12}$．

故答案为：$\dfrac{\pi}{12}$

15．已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面边长为 2，用一平面截此棱柱与侧棱AA_1,BB_1,CC_1分别交于M,N,Q，若ΔMNQ为直角三角形，则ΔMNQ面积的最小值为_____．

略解一：把N画到B处，Q在CC_1上，M在AA_1上，设$AM=x,CQ=y$不妨设$y>x$，

$$BM=\sqrt{x^2+4},BQ=\sqrt{y^2+4},MQ=\sqrt{(y-x)^2+4},\text{此时}\angle BMQ=90^o$$

$$\text{由}BM^2+MQ^2=BQ^2\text{，得}x^2-xy+2=0,\therefore y=x+\frac{2}{x}$$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{(y-x)^2+4}$，$\therefore S^2=x^2+\frac{4}{x^2}+5\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}+5=9$

$\therefore S\geq 3$，当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时取等号，$S_{\min}=3$.

略解二：以 AC 中点 O 为坐标原点，OB 所在直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴，

建立空间直角坐标系，设 $M(0,-1,a)$，$N(\sqrt{3},0,b),Q(0,1,c)$，不妨设 N 为直角，

$\overrightarrow{MN}=(\sqrt{3},1,b-a),\overrightarrow{QN}=(\sqrt{3},-1,b-c)$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{QN}=0$，

$\therefore (b-a)(b-c)+2=0,S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{QN}|=\frac{1}{2}\sqrt{4+(b-a)^2}\cdot\sqrt{4+(b-c)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{16+4[(b-a)^2+(b-c)^2]+[(b-a)(b-c)]^2}$

$\geq\frac{1}{2}\sqrt{16+16+4}=3$

16. 已知 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 是平面上不共线的两个向量，向量 $\vec{b}$ 与 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 共面，若 $\left|\overrightarrow{e_1}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{e_2}\right|=2$，$\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $\vec{b}\cdot\overrightarrow{e_1}=1$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{e_2}=2$，则 $\left|\vec{b}\right|=$________.

【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

分析】

设 $\vec{b}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$，由已知 $\vec{b}\cdot\overrightarrow{e_1}=1$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{e_2}=2$ 可得 $x+y=1$，$x+4y=2$，从而可求出 $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$，则 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\vec{e}_1+\frac{1}{3}\vec{e}_2\right)^2}$，即可求出模长.

【详解】解：设 $\vec{b}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$，因为 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$， 所以 $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\left|\vec{e}_1\right|\left|\vec{e}_2\right|\cos\frac{\pi}{3}=1$ ，

则 $\vec{b}\cdot\vec{e}_1=\left(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2\right)\cdot\vec{e}_1=x\left|\vec{e}_1\right|^2+y\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=x+y=1$，

$\vec{b}\cdot\vec{e}_2=\left(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2\right)\cdot\vec{e}_2=y\left|\vec{e}_2\right|^2+x\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=x+4y=2$，解得 $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$，

则 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\vec{e}_1+\frac{1}{3}\vec{e}_2\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\left|\vec{e}_1\right|^2+\frac{1}{9}\left|\vec{e}_2\right|^2+\frac{4}{9}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题考查了向量的数量积运算，考查了平面向量基本定理，考查了向量模的求解.本题的难点是用已知 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 表示 $\vec{b}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，已知$a_6=12$，$a_{18}=36$．

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式a_n；

（2）若________，求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和S_n．

在①$b_n=\dfrac{4}{a_na_{n+1}}$，②$b_n=(-1)^n\cdot a_n$，③$b_n=2^{a_n}\cdot a_n$这三个条件中任选一个补充在第（2）问中，并对其求解．注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

【答案】（1）$a_n=2n$；（2）选条件①：$S_n=\dfrac{n}{n+1}$，选条件②：$S_n=\begin{cases}n,n为偶数,\\-n-1,n为奇数.\end{cases}$，选条件③：$S_n=\dfrac{8}{9}\left(1-4^n\right)+\dfrac{2n}{3}\cdot4^{n+1}$．

【分析】本题第（1）题先设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，然后根据已知条件列出关于首项a_1与公差d的方程组，解出a_1与d的值，即可得到等差数列$\{a_n\}$的通项公式；

第（2）题对于方案一：选条件①，先根据第（1）题的结果计算出数列$\{b_n\}$的通项公式，然后运用裂项相消法可计算出前n项和S_n；对于方案二：选条件②，先根据第（1）题的结果计算出数列$\{b_n\}$的通项公式，然后分n为偶数和奇数两种情况分别求和，并运用分组求和法和等差数列的求和公式进行计算，即可计算出前n项和S_n；对于方案三：选条件③，先根据第（1）题的结果计算出数列$\{b_n\}$的通项公式，然后根据通项公式的特点运用错位相减法可计算出前n项和S_n．

【详解】解：（1）由题意，$\begin{cases}a_1+5d=12,\\a_1+17d=36,\end{cases}$解得$d=2$，$a_1=2$．$\therefore a_n=2+(n-1)\times2=2n$．

（2）选条件①：$b_n=\dfrac{4}{2n\cdot2(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

选条件②：$\because a_n=2n$，$b_n=(-1)^na_n$，$\therefore S_n=-2+4-6+8-\cdots+(-1)^n\cdot2n$，

当n为偶数时，$S_n=(-2+4)+(-6+8)+\cdots+[-2(n-1)+2n]=\dfrac{n}{2}\times2=n$；

当 n 为奇数时，$n-1$ 为偶数，$S_n=(n-1)-2n=-n-1$．$\therefore S_n=\begin{cases}n, n\text{为偶数},\\-n-1, n\text{为奇数}.\end{cases}$

选条件③：$\because a_n=2n$，$b_n=2^{a_n}\cdot a_n$，$\therefore b_n=2^{2n}\cdot 2n=2n\cdot 4^n$，

$\therefore S_n=2\times4^1+4\times4^2+6\times4^3+\cdots+2n\times4^n$，①

$4S_n=2\times4^2+4\times4^3+6\times4^4+\cdots+2(n-1)\times4^n+2n\times4^{n+1}$，②

由①-②得，

$-3S_n=2\times4^1+2\times4^2+2\times4^3+\cdots+2\times4^n-2n\times4^{n+1}=\dfrac{8\left(1-4^n\right)}{1-4}-2n\times4^{n+1}$，$=\dfrac{8\left(1-4^n\right)}{-3}-2n\times4^{n+1}$，

$\therefore S_n=\dfrac{8}{9}\left(1-4^n\right)+\dfrac{2n}{3}\cdot4^{n+1}$．

【点睛】本题主要考查等差数列的基本量的计算，以及数列求和问题．考查了转化与化归思想，方程思想，分类讨论思想，等差数列求和公式的应用，以及逻辑推理能力和数学运算能力．属于中档题．

18．（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)\left(A>0,\omega>0\right)$ 只能同时满足下列三个条件中的两个：①函数 $f\left(x\right)$ 的最大值为 2；②函数 $f\left(x\right)$ 的图象可由 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象平移得到；③函数 $f\left(x\right)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$．

（1）请写出这两个条件序号，并求出 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）求方程 $f\left(x\right)+1=0$ 在区间 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上所有解的和．

【答案】（1）满足的条件为①③；$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$（2）$\dfrac{2\pi}{3}$

【分析】

（1）根据题意，条件①②互相矛盾，所以③为函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 满足的条件之一，根据条件③，可以确定函数的最小正周期，进而求得 ω 的值，并对条件①②作出判断，最后求得函数解析式；

（2）将 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 代入方程 $f\left(x\right)+1=0$，求得 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$，从而确定出 $2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 或 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，结合题中所给的范围，得到结果．

【详解】（1）函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$满足的条件为①③；

理由如下：由题意可知条件①②互相矛盾，故③为函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$满足的条件之一，

由③可知，$T=\pi$，所以$\omega=2$，故②不合题意，

所以函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$满足的条件为①③；

由①可知$A=2$，所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；

（2）因为 $f\left(x\right)+1=0$，所以$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

所以$2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$或$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以$x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$或$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

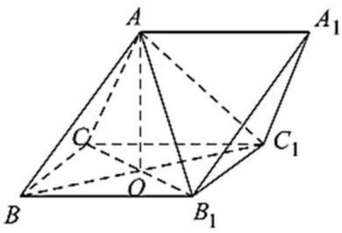
又因为$x\in\left[-\pi,\pi\right]$，所以 x 的取值为$-\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$，$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$，

所以方程 $f\left(x\right)+1=0$在区间$\left[-\pi,\pi\right]$上所有的解的和为$\dfrac{2\pi}{3}$.

【点睛】该题考查的是有关三角函数的问题，涉及到的知识点有正弦型函数的性质，结合性质确定函数解析式，解三角方程，属于简单题目.

19.（12 分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BC=BB_1$，$BC_1\cap B_1C=O$，$AO\perp$平面BB_1C_1C.



（1）求证：$AB\perp B_1C$；

（2）若$\angle B_1BC=60°$，直线A_1B_1与平面BB_1C_1C所成的角为$30°$，求二面角$A_1-B_1C_1-B$的余弦值.

【详解】

（1）证明：因为$AO\perp$平面BB_1C_1C，所以$AO\perp B_1C$，

因为$BC=BB_1$，所以四边形BB_1C_1C是菱形，所以$BC_1\perp B_1C$，

因为 $AO \cap BC_1 = O$，所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1，

所以 $B_1C \perp AB$.

（2）因为 A_1B_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为$30°$， $A_1B_1 // AB$，所以 AB 与平面 BB_1C_1C 所成的角为$30°$，

因为 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C，所以 AB 与平面 BB_1C_1C 所成的角为$\angle ABO$，所以$\angle ABO = 30°$，

令 $BC = 2$，则 $B_1C = 2$， $BO = \sqrt{3}$， $OA = 1$，

以 O 为坐标原点，分别以 OB， OB_1， OA 为 x， y， z 轴建立如图空间直角坐标系，

则 $O(0,0,0)$， $B\left(\sqrt{3},0,0\right)$， $B_1(0,1,0)$， $A(0,0,1)$， $C_1\left(-\sqrt{3},0,0\right)$，

因为$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BB_1} = \left(0,0,1\right) + \left(-\sqrt{3},1,0\right) = \left(-\sqrt{3},1,1\right)$，

所以 $A_1\left(-\sqrt{3},1,1\right)$，平面 B_1C_1B 的一个法向量为$\overrightarrow{OA} = (0,0,1)$，

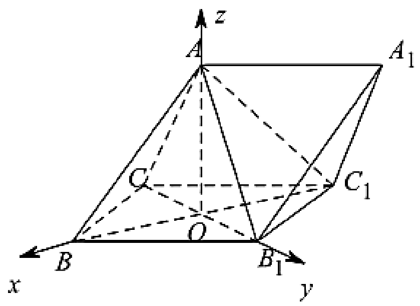
设平面 $B_1C_1A_1$ 的一个法向量为$\vec{n} = (x,y,z)$，

则$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1} = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} -\sqrt{3}x + z = 0 \\ -\sqrt{3}x - y = 0 \end{cases}$，

令 $x = 1$，则 $y = -\sqrt{3}$， $z = \sqrt{3}$， $\vec{n} = \left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

所以$\cos\left\langle \vec{n},\overrightarrow{OA} \right\rangle = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right|} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以二面角 $A_1 - B_1C_1 - B$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



【点睛】

本题主要考查直线与平面位置关系，利用空间向量法求二面角，考查空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力，考查数形结合思想、转化与化归思想.

20．（12 分）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，向量$\vec{m}=(\cos C,2b-\sqrt{3}c)$，$\vec{n}=(\cos A,\sqrt{3}a)$，$\vec{m}//\vec{n}$.

（1）求角A的大小；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，且$b^2-a^2=\dfrac{1}{2}c^2$，求b的值.

【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{6}$；（2）$b=3$.

【分析】（1）法一：由向量平行的坐标转化可得$\sqrt{3}a\cos C=(2b-\sqrt{3}c)\cos A$，由正弦定理转化为角的关系，即可得出结果.

法二：由向量平行的坐标转化可得$\sqrt{3}a\cos C=(2b-\sqrt{3}c)\cos A$，由余弦定理转化为边的关系，即可得出结果.

（2）由条件和余弦定理，可得$c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}b$，利用三角形面积公式即可得出结果.

【详解】（1）法一： 因为$\vec{m}//\vec{n}$，所以$\sqrt{3}a\cos C=(2b-\sqrt{3}c)\cos A$，

由正弦定理得$\sqrt{3}\sin A\cos C=2\sin B\cos A-\sqrt{3}\cos A\sin C$，

得$\sqrt{3}\sin(A+C)=2\sin B\cos A$，即$\sqrt{3}\sin B=2\sin B\cos A$，因为$\sin B>0$，所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又$A\in(0,\ \pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{6}$.

法二： 因为$\vec{m}//\vec{n}$，所以$\sqrt{3}a\cos C=(2b-\sqrt{3}c)\cos A$，

易知$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，代入上式得，

$$\sqrt{3}a\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=(2b-\sqrt{3}c)\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

整理得，$\sqrt{3}bc=b^2+c^2-a^2$，所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又$A\in(0,\ \pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{6}$.

（2）由（1）得$\sqrt{3}bc=b^2+c^2-a^2$，又$b^2-a^2=\dfrac{1}{2}c^2$，所以$c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}b$，

又$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b\times\frac{2}{\sqrt{3}}b\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，得$b^2=9$，所以$b=3$.

【点睛】本题考查了正、余弦定理，三角形的面积公式等基本解三角形知识，考查了运算求解能力和逻辑推理能力，属于中档题目.

21.（12 分）

已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20,a_3=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）记b_m为$\{a_n\}$在区间$(0,m](m\in\mathbf{N}^*)$中的项的个数，求数列$\{b_m\}$的前100项和S_{100}.

【答案】（1）$a_n=2^n$；（2）$S_{100}=480$.

【解析】

【分析】

（1）利用基本元的思想，将已知条件转化为a_1,q的形式，求解出a_1,q，由此求得数列$\{a_n\}$的通项公式.

（2）通过分析数列$\{b_m\}$的规律，由此求得数列$\{b_m\}$的前100项和S_{100}.

【详解】(1) 由于数列$\{a_n\}$是公比大于1的等比数列，设首项为a_1，公比为q，依题意有$\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20\\a_1q^2=8\end{cases}$，

解得解得$a_1=2,q=2$，或$a_1=32,q=\frac{1}{2}$(舍)，

所以$a_n=2^n$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

（2）由于$2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32,2^6=64,2^7=128$，所以

b_1对应的区间为：$(0,1]$，则$b_1=0$；

b_2,b_3对应的区间分别为：$(0,2],(0,3]$，则$b_2=b_3=1$，即有2个1；

b_4,b_5,b_6,b_7对应的区间分别为：$(0,4],(0,5],(0,6],(0,7]$，则$b_4=b_5=b_6=b_7=2$，即有2^2个2；

$b_8,b_9,\cdots,b_{15}$对应的区间分别为：$(0,8],(0,9],\cdots,(0,15]$，则$b_8=b_9=\cdots=b_{15}=3$，即有$2^3$个3；

$b_{16},b_{17},\cdots,b_{31}$对应的区间分别为：$(0,16],(0,17],\cdots,(0,31]$，则$b_{16}=b_{17}=\cdots=b_{31}=4$，即有$2^4$个4；

$b_{32},b_{33},\cdots,b_{63}$对应的区间分别为：$(0,32],(0,33],\cdots,(0,63]$，则$b_{32}=b_{33}=\cdots=b_{63}=5$，即有$2^5$个5；

$b_{64},b_{65},\cdots,b_{100}$对应的区间分别为：$(0,64],(0,65],\cdots,(0,100]$，则$b_{64}=b_{65}=\cdots=b_{100}=6$，即有37个6.

所以$S_{100}=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+5\times 2^5+6\times 37=480$.

【点睛】本小题主要考查等比数列基本量的计算，考查分析思考与解决问的能力，属于中档题.

22.（12 分）

已知函数$f\left(x\right)=ae^x\ln x$，（其中$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数），$g\left(x\right)=x^2+x\ln a$，$a>0$.

（1）讨论函数$f\left(x\right)$ 单调性；

（2）设函数$h\left(x\right)=g\left(x\right)-f\left(x\right)$，若$h\left(x\right)>0$对任意的$x\in\left(0,1\right)$恒成立，求实数$a$的取值范围.

【答案】（1）在定义域$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；（2）$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【分析】

（1）先求得$f'\left(x\right)=ae^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right),x\in\left(0,+\infty\right)$，利用导数可得$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$恒成立，故可得$f\left(x\right)$的单调区间.

（2）$h\left(x\right)>0$对任意的$x\in\left(0,1\right)$恒成立等价于$\frac{\ln\left(ae^x\right)}{ae^x}>\frac{\ln x}{x}$对任意$x\in\left(0,1\right)$恒成立，就$ae^x\geq 1$和$ae^x<1$结合$H\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$的单调性分类讨论可得$ae^x>x$对任意$x\in\left(0,1\right)$恒成立，参变分离后再次利用导数可求$a$的取值范围.

【详解】解：（1）因为$f(x)=ae^x\ln x$，所以$f'\left(x\right)=ae^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right),x\in\left(0,+\infty\right)$.

令$k\left(x\right)=\ln x+\frac{1}{x}$，则$k'\left(x\right)=\frac{x-1}{x^2}$，

当$x\in\left(0,1\right)$时，$k'\left(x\right)<0$，函数$k\left(x\right)$单调递减；

当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$k'\left(x\right)>0$，函数$k\left(x\right)$单调递增.

所以$k\left(x\right)\geq k\left(1\right)=1>0$，又因为$a>0$，$e^x>0$，

所以$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$在定义域$\left(0,+\infty\right)$上单调递增.

（2）由$h\left(x\right)>0$得$g\left(x\right)-f\left(x\right)>0$，即$ae^x\ln x<x^2+x\ln a$，

所以 $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}=\frac{\ln\left(ae^x\right)}{ae^x}$，即 $\frac{\ln\left(ae^x\right)}{ae^x}>\frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，

设 $H(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $H'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

所以，当 $x\in(0,1)$ 时，$H'(x)>0$，函数 $H(x)$ 单调递增，

且当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$H(x)>0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$H(x)<0$，

若 $ae^x\geq 1>x$，则 $H\left(ae^x\right)\geq 0>H(x)$，

若 $0<ae^x<1$，因为 $H\left(ae^x\right)>H(x)$，且 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $ae^x>x$，

综上可知，$ae^x>x$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，即 $a>\frac{x}{e^x}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立.

设 $G(x)=\frac{x}{e^x}$，$x\in(0,1)$，则 $G'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$，所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

所以 $G(x)<G(1)=\frac{1}{e}\leq a$，即 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【点睛】本题考查函数的单调性以及含参数的不等式的恒成立，前者利用导数的符号来讨论，后者需等价变形把原不等式转化简单不等式的恒成立，再根据不等式的结构特征构建新函数来讨论，本题为较难题.