泉州七中 2019-2020 学年度下学期高一年第五次单元考数学试卷

命题人：赖呈杰　曹东方　　20200606

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．第 1 到第 10 小题为单选题，第 11、12 小题为多选题．）

1. 已知 a 是实数，$\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是纯虚数，则 $a=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．$\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{2}$

2. 已知 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(3,-2)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $m=$（　　）

A．-8　　B．-6　　C．6　　D．8

3. 若点 $P(1,-2)$ 为角 θ 终边上一点，则 $\dfrac{3\cos^2\theta+\sin 2\theta}{2\sin^2\theta-3\cos^2\theta}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$-\dfrac{1}{5}$　　C．$-\dfrac{7}{5}$　　D．$\dfrac{7}{5}$

4. 给出下列说法：

①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；

②有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体是棱锥；

③棱台的上、下底面可以不相似，但侧棱长一定相等.

其中正确说法的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5. 已知 $l_1: mx+y-2=0$ 与 $l_2:(m+2)x-3y+4=0$ 与两坐标轴围成四边形有外接圆，则 m 为（　　）

A．2 或 $-\dfrac{1}{2}$　　B．-1 或 3　　C．1 或 -3　　D．-2 或 $\dfrac{1}{2}$

6. 已知点 P 为 ΔABC 所在平面上的一点，且 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中 t 为实数，若点 P 落在 ΔABC 的内部，则 t 的取值范围是（　　）

A. $0<t<\dfrac{1}{4}$　　B. $0<t<\dfrac{1}{3}$　　C. $0<t<\dfrac{1}{2}$　　D. $0<t<\dfrac{2}{3}$

7. 在 ΔABC 中，$a=2, A=\dfrac{\pi}{4}$，若此三角形有两解，则 b 的范围为（　　）

A．$b<2$　　B．$b>2$　　C．$2<b<2\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}<b<\sqrt{2}$

8. 已知 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$　　B．$\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$

9. 已知锐角三角形 ΔABC，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$，$c=2$，则 ΔABC 面积的取值范围为（　　）

A．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$　　B．$\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$　　C．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$　　D．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10. 已知点 $P(a,b)$ $(ab\neq 0)$ 是圆 $O:x^2+y^2=r^2$ 内一点，直线 m 是以 P 为中点的弦所在的直线，若直线 n 的方程为 $ax+by=r^2$，则（　　）

A． m 与 n 重合且 n 与圆 O 相离　　　　B． $m\parallel n$ 且 n 与圆 O 相交

C． $m\parallel n$ 且 n 与圆 O 相离　　　　D． $m\perp n$ 且 n 与圆 O 相离

11.（多选题）给出下列结论，其中正确的是（　　）

A．若向量 $\vec{a}=(x-1,1)$，$\vec{b}=(1,2)$ 的夹角为锐角，则 $x>-1$

B．函数 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象可由 $y=\sin 2x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到

C．存在 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，使得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$

D．若 ΔABC 为锐角三角形，则 $\sin A>\cos B$.

12.（多选题）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 满足 $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+1\right)=-\dfrac{1}{2}$，且 $f(x)$ 在 $\left(x_0,x_0+1\right)$ 上有最小值，无最大值. 则（　　）

A． $f\left(x_0+\dfrac{1}{2}\right)=-1$　　　　B．若 $x_0=0$，则 $f(x)=\sin\left(2\pi x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C． $f(x)$ 的最小正周期为 3　　　　D． $f(x)$ 在 $(0,2019)$ 上的零点个数最少为 1346 个

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 直线 $l:x+2y-1=0$ 关于点 $A(1,2)$ 的对称直线方程为____________；

过直线 $2x-y+4=0$ 与 $x-y+5=0$ 的交点，且垂直于直线 $x-2y=0$ 的直线方程是__________.

14. 给出下列命题：

①线性相关系数 r 越大，两个变量的线性相关性越强；反之，线性相关性越弱；

②由变量 x 和 y 的数据得到其回归直线方程 $l:\hat{y}=bx+a$，则 l 一定经过点 $P(\bar{x},\bar{y})$；

③从匀速传递的产品生产流水线上，质检员每 10 分钟从中抽取一件产品进行某项指标检测，这样的抽样是分层抽样；

④将一组数据中的每个数据都加上或减去同一个常数后，方差恒不变；

⑤在回归直线方程 $\hat{y}=0.1x+104$ 中，当解释变量 x 每增加一个单位时，预报变量 y 平均增加 0.1 个单位，

其中真命题的序号是__________.

15. 已知 A,B 为圆 $O:x^2+y^2=5$ 上的两个动点，$AB=4$，M 为线段 AB 的中点，点 P 为直线 $l:x+y-6=0$ 上一动点，则线段 BM 中点 N 的轨迹方程为____________；$\overline{PM}\cdot\overline{PB}$ 的最小值为________.

16. 若对圆 $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$ 上任意一点 $P\left(x,y\right)$，$|3x-4y+a|+|3x-4y-9|$ 的取值与 x,y 无关，记为 b.

则 b 的最小值为________；实数 a 的取值范围为________.

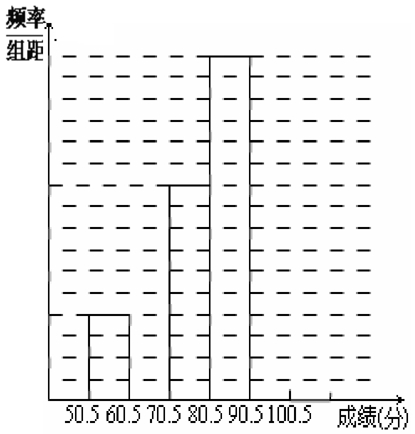
三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）已知向量 $\vec{a}=(\sin\theta,\cos\theta)$ 与 $\vec{b}=(\sqrt{3},1)$，其中 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$．

（Ⅰ）若 $\vec{a}//\vec{b}$，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值；

（Ⅱ）若 $f(\theta)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$，求 $f(\theta)$ 的值域.

18.（本小题满分 12 分）为了让学生了解环保知识，增强环保意识，某中学举行了一次“环保知识竞赛”，共有 900 名学生参加了这次竞赛．为了解本次竞赛成绩情况，从中抽取了部分学生的成绩(得分均为整数，满分为 100 分)进行统计．请你根据尚未完成并有局部污损的频率分布表和频率分布直方图，解答下列问题：



分组	频数	频率
50.5～60.5	4	0.08
60.5～70.5	①	0.16
70.5～80.5	10	②
80.5～90.5	16	0.32
90.5～100.5	③	④
合计	50	1

（Ⅰ）填充频率分布表的空格(将答案直接填在表格内)，并补全频率分布直方图；

（Ⅱ）若成绩在 75.5～85.5 分的学生为二等奖，问获得二等奖的学生约为多少人？

（Ⅲ）求这次竞赛成绩的平均分及中位数.

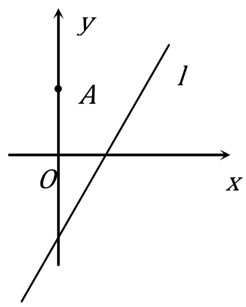
19.（本小题满分 12 分）在 ΔABC 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边，且 $4\sin^2\frac{B+C}{2}-\cos 2A=\frac{7}{2}$.

（Ⅰ）求角 A 的度数；

（Ⅱ）若 $a=\sqrt{3}$，$b+c=3$，求 b 和 c 的值.

20.（本小题满分 12 分）设圆满足：① y 轴截圆所得弦长为 2；②被 x 轴分成两段弧，其弧长之比为 $3:1$，在满足①、②的所有圆中，求圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 的圆的方程.

21.（本小题满分12分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,3)$，直线 $l:y=2x-4$，设圆 C 的半径为 1，圆心在 l 上.



（Ⅰ）若圆心 C 也在直线 $y=-2x$ 上，过点 A 作圆 C 的切线，求切线方程；

（Ⅱ）若圆 C 上存在点 M，使 $MA=2MO$，求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）设函数 $f\left(x\right)=m\sin x+3\cos x$（$x\in\mathbf{R}$），试分别解答下列两小题.

（Ⅰ）若函数 $f\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=n$（n 为常数）相邻两个交点的横坐标为 $x_1=\frac{\pi}{12},x_2=\frac{7\pi}{12}$，求函数 $y=f\left(x\right)$ 的解析式，并写出函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）当 $m=\sqrt{3}$ 时，在 ΔABC 中，满足 $f\left(A\right)=2\sqrt{3}$，且 $BC=1$，若 E 为 BC 的中点，试求 AE 的最大值.

泉州七中2019-2020学年度下学期高一年第五次单元考数学试卷答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分．第1到第10小题为单选题，第11、12小题为多选题.）

1-5:　ADBAC　6-10:　DCAAC　　11. BCD　　12. AC

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分，若有两空，则第一空2分，第二空3分.）

13.　$x+2y-9=0$；$2x+y-8=0$　　14.　②④⑤（漏选得2分，错选不得分）

15.　$x^2+y^2=2$；7　　16.　15；$[6,+\infty)$

三、解答题（本大题共6小题，共70分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第17小题满分10分，其他小题满分12分）

17.解：（Ⅰ）$\because \vec{a}//\vec{b}$，$\therefore \sin\theta\cdot 1-\sqrt{3}\cos\theta=0$，　求得$\tan\theta=\sqrt{3}$.

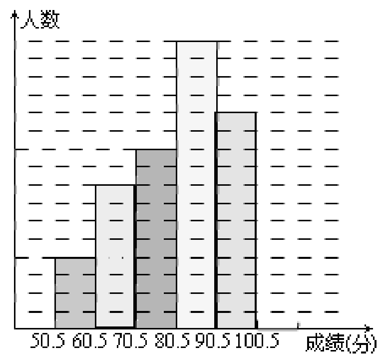
又$\because \theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$，　$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$.　…………5分

（Ⅱ）$f(\theta)=(\sin\theta+\sqrt{3})^2+(\cos\theta+1)^2=2\sqrt{3}\sin\theta+2\cos\theta+5=4\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})+5$

又$\because \theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\theta+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\dfrac{1}{2}<\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})\le 1$，

所以函数$f(\theta)$的值域为$(7,9]$.　…………10分

18.解：（Ⅰ）



分组	频数	频率
50.5~60.5	4	0.08
60.5~70.5	8	0.16
70.5~80.5	10	0.20
80.5~90.5	16	0.32
90.5~100.5	12	0.24
合计	50	1.00

频率分布直方图如左上所示　…………6分

①8；②0.20；③12；④0.24．（表格填对1空1分，直方图2分）

（Ⅱ）成绩在$75.5\sim80.5$分的学生占$70.5\sim80.5$分的学生的$\dfrac{5}{10}$，

因为成绩在$70.5\sim80.5$分的学生频率为0.2，所以成绩在$75.5\sim80.5$分的学生频率为0.1，

成绩在$80.5\sim85.5$分的学生占$80.5\sim90.5$分的学生的$\dfrac{5}{10}$，

因为成绩在$80.5\sim90.5$分的学生频率为0.32，所以成绩在$80.5\sim85.5$分的学生频率为0.16

所以成绩在$75.5\sim85.5$分的学生频率为0.26，由于有900名学生参加了这次竞赛，

所以该校获得二等奖的学生约为$0.26\times900=234$（人）　…………8分

（Ⅲ）中位数为$80.5+\dfrac{0.06}{0.32}\times10=82.375$　…………10分

平均数为$55.5\times0.08+65.5\times0.16+75.5\times0.20+85.5\times0.32+95.5\times0.24=80.3$

…………12分

19. 解：（Ⅰ）由 $4\sin^2\dfrac{B+C}{2}-\cos 2A=\dfrac{7}{2}$ 及 $A+B+C=\pi$，

得 $2\left[1-\cos\left(B+C\right)\right]-2\cos^2 A+1=\dfrac{7}{2}$， …………2 分

$\therefore 4\cos^2 A-4\cos A+1=0.\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$ …………4 分

$\because 0<A<\pi,\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$ …………6 分

（Ⅱ）由余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \left(b+c\right)^2-a^2=3bc$ …………8 分

又 $\because a=\sqrt{3},b+c=3$，得 $bc=2$， …………10 分

$\therefore b=1,c=2$ 或 $b=2,c=1$ …………12 分

20. 解：设圆 P 的圆心为 $P(a,b)$，半径为 r，

则点 P 到 x 轴，y 轴的距离分别为 $|b|,|a|$ …………2分

由题设知圆 P 截 x 轴，所得劣弧对的圆心角为 90°，

所以圆 P 截 x 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$，

故 $r^2=2b^2$， …………4分

又圆 P 被 y 轴所截得的弦长为 2，故有 $r^2=a^2+1$ …………6分

从而得 $2b^2-a^2=1$，（1） …………8分

又因为 $P(a,b)$ 到直线 $l:x-2y=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$d=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，即 $a-2b=\pm 1$ （2） …………10分

由（1）（2）得 $a=-1,b=-1$ 或 $a=1,b=1$，得 $r=\sqrt{2}$

所求圆的方程是：$(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 或 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ …………12分

21.解：（Ⅰ）由 $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=-2x \end{cases}$ 得圆心 C 为 $(1,-2)$ ……………………………………………1 分

$\because$ 圆 C 的半径为 1

$\therefore$ 圆 C 的方程为：$(x-1)^2+(y+2)^2=1$ ……………………………………2 分

设所求圆 C 的切线方程为 $y=kx+3$，即 $kx-y+3=0$

$\therefore \dfrac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1\therefore k=-\dfrac{12}{5}$，……………………………………………………4 分

又当 k 不存在时，即 $x=0$ 也符合题意……………………………………5 分

$\therefore$ 所求圆 C 的切线方程为：$x=0$ 或 $12x+5y-15=0$ ……………………6 分

（Ⅱ）∵圆C的圆心在在直线$l: y=2x-4$上，

所以设圆心C为$(a, 2a-4)$，

则圆C的方程为：$(x-a)^2+[y-(2a-4)]^2=1$ ……………………………………7 分

又∵ $MA=2MO$

∴设M为(x, y)则$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$

整理得：$x^2+(y+1)^2=4$设为圆D ……………………………………………9 分

∴点M应该既在圆C上又在圆D上　即圆C和圆D有交点

∴$|2-1| \le \sqrt{a^2+[(2a-4)-(-1)]^2} \le |2+1|$ ……………………………………10 分

由$5a^2-8a+8 \ge 0$得$x \in \mathbf{R}$

由$5a^2-12a \le 0$得$0 \le x \le \frac{12}{5}$，

所以a的取值范围为：$\left[0, \frac{12}{5}\right]$ ………………………………………………………12 分

22.解：（Ⅰ）法一：由已知得$f(x)=\sqrt{m^2+9}\sin(x+\varphi)$，

当且仅当$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{3}$时函数取得最值，

则有$\left|\frac{m\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right|=\sqrt{m^2+9}$ …………2 分，

得$\left(\sqrt{3}m+3\right)^2=4m^2+36, m^2-6\sqrt{3}m+27=0$

$\therefore m=3\sqrt{3}$

$\therefore f(x)=3\sqrt{3}\sin x+3\cos x=6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$， …………4 分

则其单调递增区间为$\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.………6 分

法二：依题意得：$\begin{cases} m\sin\frac{\pi}{12}+3\cos\frac{\pi}{12}=n \\ m\sin\frac{7\pi}{12}+3\cos\frac{7\pi}{12}=n \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} m\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+3\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=n \\ m\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-3\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=n \end{cases}, \therefore m=3\sqrt{3}$. …………3 分

$\therefore f(x)=\sqrt{3}\sin x+3\cos x=6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$， …………4 分

则其单调递增区间为$\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$. ………6 分

（Ⅱ）设ΔABC各角对应的边分别为a,b,c，

法一：当$m=\sqrt{3}$时，由（Ⅰ）得$f\left(A\right)=2\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$，

又$\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，$\therefore A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,得$A=\frac{\pi}{6}$.　…………8 分

由边$a=1$与$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

得$1=b^2+c^2-\sqrt{3}bc,\therefore 1\geq\left(2-\sqrt{3}\right)bc$

则$0<bc\leq\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，　…………10 分

$\because\left|\overrightarrow{AE}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\left(b^2+c^2+\sqrt{3}bc\right)$

又$b^2+c^2=1+\sqrt{3}bc$

$\therefore\left|\overrightarrow{AE}\right|^2=\frac{1}{4}\left(1+2\sqrt{3}bc\right)\leq\frac{1}{4}\left(7+4\sqrt{3}\right)=\frac{7}{4}+\sqrt{3}$

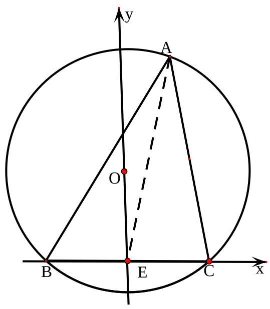
化简得：$\left|AE\right|$的最大值为$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.　…………12 分

法二：同解法一得$A=\frac{\pi}{6}$，　…………8 分

又$BC=1$，以BC所在的直线为x轴，线段BC的中垂线为y轴建系，

此外构造ΔABC外接圆O，则有直径$2r=\frac{a}{\sin A}=2$，$r=1$，则圆心$O\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

圆的方程是$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$，…………10 分



设点$A\left(x,y\right)$，则由图像可得$y\in\left(0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，

$\left|AE\right|^2=x^2+y^2=\sqrt{3}y+\frac{1}{4}\in\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}+\sqrt{3}\right]$

化简得：$\left|AE\right|$的最大值$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.　…………12 分

另解：同解法二得圆心和半径，　…………10 分

设圆O交y轴于点P,连接OA, 则$PE=OP+OE=OA+OE\geq AE$,

在ΔOEC中$OE=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

当且仅当A、P重合时，$\left|AE\right|$有最大值$PE=r+OE=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.　…………12 分