专题(5)

函数与导数的高考命题分析

■福建省泉州市第七中学　　彭耿铃

全国卷强调“能力立意”，以知识为载体，以思维能力为核心，全面考查运算求解、推理论证、抽象概括以及应用意识和创新意识。下面针对高考的核心内容函数与导数进行命题分析，对高考试题的命题知识、方法进行归纳、概括，揭示高考试题的本质以及来龙去脉，培养同学们更自然地掌握解题策略，希望能对大家决胜高考有所帮助！

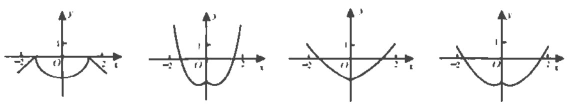
一、函数高考要求和命题分析

①高考对函数的考查一般为3道小题，约15分；②从考查内容上看主要涉及函数的图像，指数、对数的大小比较，函数的性质及零点问题；③在解答题中多与导数、不等式结合命题，试题难度较大。

函数高考试题主要有以下几种考查形式。

1. 函数图像：考查图像平移、对称，函数的最值、单调性

例1　(2016年全国Ⅰ卷)函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在$[-2,2]$上的图像大致为(　　)。



A.　　B.　　C.　　D.

解析：$y=f(x)=2x^2-e^{|x|}$ 是偶函数，且 $f(2)=8-e^2\in(0,1)$，排除选项A，B；当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)=2x^2-e^x$，则 $f'(x)=4x-e^x$，易知 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 上单调递减，排除选项C，故选D。

本题考查函数的奇偶性、单调性，函数值的符号特征极值。

2. 指对数比较大小：考查单调性、换底公式、与中间变量的临界比较

例2　设 $a=\log_\pi e$，$b=\ln\frac{\pi}{e}$，$c=\ln\frac{e^2}{\pi}$，则(　　)。

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$

C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

解析：因为 $b+c=1$，所以分别与中间量 $\frac{1}{2}$ 比较。$b-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\pi^2}{e^2}-\ln e\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2}{e^3}<0$，$c-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{e^4}{\pi^2}-\ln e\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{e^3}{\pi^2}>0$，故 $b<\frac{1}{2}<c$。$a=\log_\pi e=\frac{1}{2}\log_\pi e^2>\frac{1}{2}$，$a-c=\frac{1}{\ln\pi}-(2-\ln\pi)=\ln\pi+\frac{1}{\ln\pi}-2>2\sqrt{\ln\pi\cdot\frac{1}{\ln\pi}}-2=0$，则 $b<c<a$。故选B。

例3　(2018年全国Ⅲ卷)设 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则(　　)。

A. $a+b<ab<0$　　B. $ab<a+b<0$

C. $a+b<0<ab$　　D. $ab<0<a+b$

解析：$a=\log_{0.2}0.3$，由换底公式得 $\frac{1}{a}=\log_{0.3}0.2$。同理，由 $b=\log_2 0.3$，得 $\frac{1}{b}=\log_{0.3}2$。所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{0.3}0.2+\log_{0.3}2=\log_{0.3}0.4$，即 $0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，$0<\frac{a+b}{ab}<1$。又 $a>0$，$b<0$，所以 $ab<0$，$ab<a+b<0$。故选B。

3. 函数的性质：重点考查单调性、零点、最值、对称

例4　(2019年全国Ⅲ卷)设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则(　　)。

A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})$

B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})$

C. $f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$

D. $f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$

解析：因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)=f(-\log_3 4)=f(\log_3 4)$，且

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\log_3 4>1=2^0>2^{-\frac{2}{3}}>2^{-\frac{3}{2}}>0$。又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(\log_3 4)<f(2^{-\frac{2}{3}})<f(2^{-\frac{3}{2}})$，即 $f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$。故选 C。

例 5 （2018年全国Ⅰ卷）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\leqslant 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$。若 $g(x)$ 存在2个零点，则 a 的取值范围是（　　）。

A. $[-1,0)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

解析：函数 $g(x)=f(x)+x+a$ 存在2个零点，即关于 x 的方程 $f(x)=-x-a$ 有2个不同的实根，即函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=-x-a$ 有2个交点，作出直线 $y=-x-a$ 与函数 $f(x)$ 的图像，如图1所示。

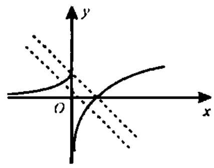


图1

由图可知，$-a\leqslant 1$，解得 $a\geqslant -1$，故选 C。

例 6 （2019年课标Ⅱ卷）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$。若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geqslant -\frac{8}{9}$，则 m 的取值范围是（　　）。

A. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$

解析：此题是“类周期函数”。函数每向右平移一个单位，纵坐标总扩大2倍，作出函数的图像，解出相应的函数解析式，再根据恒成立的条件，可求出 m 的取值范围。如图2，

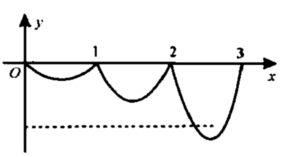


图2

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1)x,-1<x\leqslant 0,\\ x(x-1),0<x\leqslant 1,\\ 2(x-1)(x-2),1<x\leqslant 2,\\ 2^2(x-2)(x-3),2<x\leqslant 3。\end{cases}$ 设 $y=-\frac{8}{9}$ 与 $y=f(x)$ 的第一个交点的横坐标为 x_1，则 $m\leqslant x_1$。

当 $x\in(2,3]$ 时，$f(x)=2^2(x-2)(x-3)$，$f(x)=-\frac{8}{9}$，解得 $x_1=\frac{7}{3}$，则 $m\leqslant\frac{7}{3}$。

答案为 B。

二、导数高考要求和命题分析

①本章内容在高考中一般是“一大一小”呈现，约17分；②在选择题或填空题中考查导数的几何意义，构造函数等；③解答题一般都有两问，第一问考查求曲线的切线方程或求函数的单调区间，属于基础问题，第二问常考查利用导数证明不等式，或已知单调区间或极值求参数的取值范围，以及函数的零点、导数在函数单调性中的应用等问题，总体难度偏大。

导数高考试题主要有以下几种考查形式。

（一）函数切线问题

例 7 （2016年全国Ⅱ卷）若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$____。

解析：设 $y=kx+b$ 与 $y=\ln x+2$ 和 $y=\ln(x+1)$ 的切点分别为 $A(x_1,\ln x_1+2)$ 和 $B(x_2,\ln(x_2+1))$。

则切线分别为 $y-\ln x_1-2=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，$y-\ln(x_2+1)=\frac{1}{x_2+1}(x-x_2)$。

化简得：$y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1+1$，$y=\frac{1}{x_2+1}x+\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$。

依题意得：

$$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1},\\ \ln x_1+1=\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}。\end{cases}$$

解得 $x_1=\frac{1}{2}$，从而 $b=\ln x_1+1=1-\ln 2$。

（二）构造函数

例 8 设函数 $f(x)$ 满足 $x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}$，$f(2)=\frac{e^2}{8}$，则 $x>0$ 时，则 $f(x)$（　　）。

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

A. 有极大值，无极小值

B. 有极小值，无极大值

C. 既有极大值又有极小值

D. 既无极大值也无极小值

解析：由题意知 $f'(x)=\frac{e^x}{x^3}-\frac{2f(x)}{x}=\frac{e^x-2x^2f(x)}{x^3}$，构造函数 $g(x)=e^x-2x^2f(x)$，则 $g'(x)=e^x-2x^2f'(x)-4xf(x)=e^x-2(x^2f'(x)+2xf(x))=e^x-\frac{2e^x}{x}=e^x\left(1-\frac{2}{x}\right)$。由 $g'(x)=0$，得 $x=2$。分析可知，当 $x=2$ 时，$g(x)_{\min}=e^2-2\times2^2\times\frac{e^2}{8}=0$，即 $g(x)\geqslant0$。故当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}\geqslant0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，选 D。

例 9 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，且 $\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $f(x)>f'(x)$，则（ ）。

A. $e^{2\,020}f(-2\,020)<f(0)$，$f(2\,020)>e^{2\,020}f(0)$

B. $e^{2\,020}f(-2\,020)<f(0)$，$f(2\,020)<e^{2\,020}f(0)$

C. $e^{2\,020}f(-2\,020)>f(0)$，$f(2\,020)>e^{2\,020}f(0)$

D. $e^{2\,020}f(-2\,020)>f(0)$，$f(2\,020)<e^{2\,020}f(0)$

解析：构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)e^x-(e^x)'f(x)}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$。因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $f(x)>f'(x)$，并且 $e^x>0$，所以 $g'(x)<0$，函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减。因此，$g(-2\,020)>g(0)$，$g(2\,020)<g(0)$，即 $\frac{f(-2\,020)}{e^{-2\,020}}>f(0)$，$\frac{f(2\,020)}{e^{2\,020}}<f(0)$，即 $e^{2\,020}f(-2\,020)>f(0)$，$f(2\,020)<e^{2\,020}f(0)$，故选 D。

总结：(1)对于 $f'(x)>g'(x)$，构造 $h(x)=f(x)-g(x)$；若遇到 $f'(x)>a(a\neq0)$，则构造 $h(x)=f(x)-ax$。

(2)对于 $f'(x)+g'(x)>0$，构造 $h(x)=f(x)+g(x)$。

(3)对于 $f'(x)+f(x)>0$，构造 $h(x)=e^xf(x)$。

(4)对于 $f'(x)>f(x)$［或 $f'(x)-f(x)>0$］，构造 $h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$。

(5)对于 $xf'(x)+f(x)>0$，构造 $h(x)=xf(x)$。

(6)对于 $xf'(x)-f(x)>0$，构造 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$。

(7)对于 $xf'(x)+nf(x)\geqslant0$，构造 $h(x)=x^nf(x)$，则 $h'(x)=x^nf'(x)+nx^{n-1}f(x)=x^{n-1}[xf'(x)+nf(x)]$。

(8)$xf'(x)-nf(x)\geqslant0$，构造 $h(x)=\frac{f(x)}{x^n}$，则 $h'(x)=\frac{x^nf'(x)-nx^{n-1}f(x)}{(x^n)^2}=\frac{xf'(x)-nf(x)}{x^{n+1}}$。

(三)指对数同构

①$x=e^{\ln x}$；②$x\cdot e^x=e^{\ln x}\cdot e^x=e^{x+\ln x}$；③$x+\ln x=e^{\ln x}+\ln x$；④$x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$，⑤$x^2\cdot e^x=e^{\ln x^2}\cdot e^x=e^{2\ln x+x}$；⑥$\frac{e^x}{x}=\frac{e^x}{e^{\ln x}}=e^{x-\ln x}$；⑦$x\cdot e^x=e^{x+\ln x}\geqslant(x+\ln x)+1$，当且仅当 $x+\ln x=0$ 时等号成立（利用 $e^x\geqslant x+1$ 放缩）；⑧$x\cdot e^x=e^{x+\ln x}\geqslant e(x+\ln x)$，当且仅当 $x+\ln x=1$ 时等号成立（利用 $e^x\geqslant ex$ 放缩）。

例 10 已知函数 $f(x)=e^x-a\ln(ax-a)+a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（ ）。

A. $(0,e^2]$　　B. $(0,e^2)$

C. $[1,e^2]$　　D. $(1,e^2)$

解析：由 $ax-a>0$ 可得 $x>1$，故函数的定义域为 $(1,+\infty)$。由 $f(x)>0$，得 $\frac{e^x}{a}-\ln a>\ln(x-1)-1$。由指对数同构得 $a=e^{\ln a}$，$x-1=e^{\ln(x-1)}$，故可得 $e^{x-\ln a}+(x-\ln a)>\ln(x-1)+(x-1)$，即 $e^{x-\ln a}+(x-\ln a)>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$。设 $g(x)=e^x+x$，则

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$g'(x)=e^x+1>0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数。故由$e^{x-\ln a}+(x-\ln a)>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$，可得$g(x-\ln a)>g[\ln(x-1)]$，即$x-\ln a>\ln(x-1)$，也即$x-\ln(x-1)>\ln a$，$\ln a<(x-\ln(x-1))_{\min}$。设$h(x)=x-\ln(x-1)(x>1)$，则$h'(x)=\frac{x-2}{x-1}$。故当$x\in(1,2)$时，$h'(x)<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$。所以$h(x)_{\min}=h(2)=2$，$\ln a<2\Rightarrow 0<a<e^2$。答案为B。

例11 设实数$\lambda>0$，若对任意的$x\in(0,+\infty)$，不等式$e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$恒成立，则$\lambda$的最小值为(　　)。

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{1}{2e}$　　C. $\frac{2}{e}$　　D. $\frac{e}{3}$

解析：$e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$，即$\lambda e^{\lambda x}-\ln x\geqslant 0$，也即$\lambda xe^{\lambda x}-x\ln x\geqslant 0$，$\lambda xe^{\lambda x}\geqslant x\ln x$。由指对数同构得$x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$，故可得$(\lambda x)\cdot e^{\lambda x}\geqslant\ln x\cdot e^{\ln x}$。设$f(x)=xe^x$，则$f'(x)=(x+1)e^x>0$对$x\in(0,+\infty)$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增。由$(\lambda x)\cdot e^{\lambda x}\geqslant\ln x\cdot e^{\ln x}$，可得$f(\lambda x)\geqslant f(\ln x)$，即$\lambda x\geqslant\ln x$，也即$\lambda\geqslant\frac{\ln x}{x}$，$\lambda\geqslant\left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}$。令$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$。所以当$x\in(0,e)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当$x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减。所以$g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，$\lambda\geqslant\frac{1}{e}$，选A。

(四)高考导数压轴题常见的考题可分为三类：①证明不等式的问题，含参变量的取值范围问题；②函数的零点问题；③函数的最值与极值问题

解决上述题型的常规方法为以下几种方法。

1. 必要探路，先猜后证，特值合理推导

例12 (2013年新课标Ⅰ卷理科第21题)已知函数$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=e^x(cx+d)$，若曲线$y=f(x)$和曲线$y=g(x)$都过点$P(0,2)$，且在点P处有相同的切线$y=4x+2$。

(1)求a,b,c,d的值；

(2)若$x\geqslant-2$时，$f(x)\leqslant kg(x)$，求k的取值范围。

解析：(1)由已知得$f(0)=g(0)=2$，$f'(0)=g'(0)=4$。而$f'(x)=2x+a$，$g'(x)=e^x(cx+d+c)$，解得$a=4,b=2,c=2,d=2$。

(2)设函数$F(x)=kg(x)-f(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2(x\geqslant-2)$，则$F'(x)=2ke^x(x+2)-2x-4=2(x+2)(ke^x-1)(x\geqslant-2)$。

由题设可取特殊值去缩小参数范围，故可取$x=0$和$x=-2$，得$\begin{cases}F(0)\geqslant 0,\\F(-2)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geqslant 1,\\k\leqslant e^2\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant k\leqslant e^2$。则$F(x)\geqslant 0$成立的必要条件是$1\leqslant k\leqslant e^2$。

下面证明：$1\leqslant k\leqslant e^2$符合题意。令$F'(x)=0$得，$x_1=-\ln k$，$x_2=-2$，此时，类比二次函数根的分布进行分类讨论解答。因为$x\geqslant-2$，所以$x+2\geqslant 0$。又$1\leqslant k\leqslant e^2$，故$0\leqslant\ln k\leqslant 2$，$-2\leqslant x_1=-\ln k\leqslant 0$。

①若$k=e^2$，即$x_1=x_2=-2$，则$F'(x)\geqslant 0$，即$F(x)$在$[-2,+\infty)$上单调递增。又$F(-2)=0$，故当$x\geqslant-2$时，$F(x)\geqslant 0$，即$f(x)\leqslant kg(x)$恒成立。②若$1\leqslant k<e^2$时，即$-\ln k>-2$。当$x\in[-2,-\ln k]$时，$F'(x)\leqslant 0$；当$x\in[-\ln k,+\infty)$时，$F'(x)\geqslant 0$。则$F(x)$在$[-2,-\ln k]$上单调递减，$F(x)$在$[-\ln k,+\infty)$上单调递增，$F(x)\geqslant F(-\ln k)=\ln k(2-\ln k)\geqslant 0$，所以当$x\geqslant-2$时，$F(x)\geqslant 0$，即$f(x)\leqslant kg(x)$恒成立。

综上，k的取值范围是$[1,e^2]$。

例13 (2019年全国Ⅰ卷文科第20题)已知函数$f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$为$f(x)$的导数。

(1)证明：$f'(x)$在区间$(0,\pi)$内存在唯一零点；(2)若$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geqslant ax$，求a的取值范围。

解析：(1)设$g(x)=f'(x)$，则$g(x)=\cos x+x\sin x-1$，$g'(x)=x\cos x$。当$x\in$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$；当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$g'(x)<0$。所以$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减。又$g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$g(\pi)=-2$，故$g(x)$在$(0,\pi)$内存在唯一零点。所以$f'(x)$在$(0,\pi)$内存在唯一零点。

(2)由题设可取特殊值去缩小参数范围，故可取$x=\pi$得$f(\pi)=0\geqslant a\pi$，所以$a\leqslant 0$。故$f(x)\geqslant ax$成立的必要条件是$a\leqslant 0$。下面证明：$a\leqslant 0$符合题意。由(1)知，$f'(x)$在$(0,\pi)$内只有一个零点，设为x_0，且当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)>0$；当$x\in[x_0,\pi]$时，$f'(x)<0$。所以$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在(x_0,π)上单调递减。又$f(0)=0$，$f(\pi)=0$，所以，当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geqslant 0$。又当$a\leqslant 0$，$x\in[0,\pi]$时，$ax\leqslant 0$，故$f(x)\geqslant ax$。

因此，a的取值范围是$(-\infty,0]$。

必要探路，先猜后证，特值合理推导不仅需要综合我们在基本点、交汇点上的经验，还需要直觉、估算、转换视角等思维方式的参与，把问题上升到了一定高度，是最见数学功力、最能体现同学们能力的地方。

2. 端点效应，合情推理

例14　(2010年新课标卷第21题)设函数$f(x)=e^x-1-x-ax^2$。

(1)若$a=0$，求$f(x)$的单调区间；

(2)当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$，求a的取值范围。

解析：(1)若$a=0$，$f(x)=e^x-1-x$，$f'(x)=e^x-1$。当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$。所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增。

(2)$f'(x)=e^x-1-2ax$，由(1)知$e^x\geqslant 1+x$，当且仅当$x=0$时等号成立，故$f'(x)\geqslant x-2ax=(1-2a)x$。从而当$1-2a\geqslant 0$，即$a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f'(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$。而$f(0)=0$，于是当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$。由$e^x>1+x(x\neq 0)$，可得$e^{-x}>1-x(x\neq 0)$。从而当$a>\frac{1}{2}$时，$f'(x)<e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$，故当$x\in(0,\ln 2a)$时，$f'(x)<0$。而$f(0)=0$，于是当$x\in(0,\ln 2a)$时，$f(x)<0$，与题意矛盾。

综上，a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

高考这样的解答是如何想到的呢？这里的问题是凭什么"由$e^x>1+x(x\neq 0)$可得$e^{-x}>1-x(x\neq 0)$"呢？又凭什么想到当$a>\frac{1}{2}$时，对$f'(x)=e^x-1-2ax$作如此的变形"$f'(x)<e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$"呢？很多同学无法理解这一参考答案。一定要这么解吗？有没有其他的解法呢？我们再审视问题："当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$"其实可以转化为："当$x\geqslant 0$时，$f(x)_{\min}\geqslant 0$"，如此一来，我们就可以猜想出a的值了。注意观察发现端点$f(0)=0$，于是问题等价于："当$x\geqslant 0$时，$f(x)_{\min}\geqslant 0=f(0)$"，即猜想$f(x)$应该在$[0,+\infty)$上单调递增。故$f'(x)=e^x-1-2ax\geqslant 0$对$x\in[0,+\infty)$恒成立。同样地，发现端点$f'(0)=0$，故$f'(x)$应该在$[0,+\infty)$上单调递增。令$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$，则$g'(x)=e^x-2a\geqslant 0$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立。因为$g'(x)=e^x-2a$单调递增，所以$g'(x)_{\min}=g'(0)=1-2a\geqslant 0$，解得$a\leqslant\frac{1}{2}$。有了这个猜想，我们只要证明：①当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)\geqslant 0$对$x\in[0,+\infty)$恒成立；②当$a>\frac{1}{2}$时，$f(x)\geqslant 0$对$x\in[0,+\infty)$不恒成立即可。

证明过程如下：因为$f(x)=e^x-1-x-ax^2$，所以$f'(x)=e^x-1-2ax$。令$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$，则$g'(x)=e^x-2a$。①当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，$g'(x)=e^x-2a\geqslant 0$对$x\in[0,+\infty)$恒成立，$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$在$[0,+\infty)$上单调递增，$f'(x)\geqslant f'(0)=0$，$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，$f(x)\geqslant f(0)=0$对一切的$x\in[0,+\infty)$恒成立，则$a\leqslant\frac{1}{2}$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

符合题意；②当 $a>\frac{1}{2}$ 时，令 $g'(x)=e^x-2a=0\Rightarrow x=\ln(2a)$，则当 $x\in(0,\ln(2a))$ 时，$g'(x)=e^x-2a<0$，$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$ 在 $(0,\ln(2a))$ 上单调递减。又 $f'(0)=0$，故当 $x\in(0,\ln(2a))$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,\ln(2a))$ 上单调递减，$f(x)<f(0)=0$ 对 $x\in(0,\ln(2a))$ 恒成立，这与当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾，$a>\frac{1}{2}$ 不符题意，故舍去。

综上所述，a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

相比高考提供的参考答案，这样的解答显得自然而且通俗易懂。

本题中的端点效应、合情推理起到了决定性作用，有了这一猜想，我们才能产生解题的思路。反过来，我们回顾高考的标准答案，就可以理解高考标准答案为何以“$a\leqslant\frac{1}{2}$”和“$a>\frac{1}{2}$”为分类标准，又为什么要配出当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$，故当 $x\in(0,\ln(2a))$ 时，$f'(x)<0$。这样一反思，我们才能发现命题者其实是有一个 a 以 $\frac{1}{2}$ 为最大值的期望。事实上，在解恒成立、有解问题时，有时很难将参数分离出来，或者即使将参数分离出来，也很难将运算进行下去时，怎么办？这就需要对参数进行预测，只有这样我们才能顺利解决问题。

3. 隐零点反代

例15 （2013年新课标Ⅱ卷理科第21题）已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$。

（1）设 $x=0$ 为 $y=f(x)$ 的极值点，求 m 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $m\leqslant 2$ 时，证明：$f(x)>0$。

解析：（1）$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+m}$。因为 $x=0$ 为 $y=f(x)$ 的极值点，所以 $f'(0)=0$，解得 $m=1$。$f(x)=e^x-\ln(x+1)$，定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$。因为 $f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$，所以 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(0)=0$。因此，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(0)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(0)>0$。所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

（2）当 $m\leqslant 2$ 时，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$，故只需证明当 $m=2$ 时，$f(x)>0$ 即可。当 $m=2$ 时，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增。又 $f'(-1)=\frac{1}{e}-1<0$，$f'(0)=\frac{1}{2}>0$，故 $f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$。所以，当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值。由 $f'(x_0)=0$，得 $f'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0+2}=0\Rightarrow e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}\Rightarrow x_0+2=e^{-x_0}\Rightarrow\ln(x_0+2)=-x_0$，故 $f(x)\geqslant f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$。

综上，当 $m\leqslant 2$ 时，$f(x)>0$。

导函数的零点求不出，通常把隐零点反代入原函数然后利用均值不等式或利用对勾函数单调性解题是高考压轴题中常用的方法。

4. 数形结合

例16 （2015年新课标Ⅰ卷理科第21题）已知函数 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$，$g(x)=-\ln x$。

（1）当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（2）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ $(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数。

解析：（1）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $(x_0,0)$，则 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$。即

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\begin{cases}x_0^3+ax_0+\frac{1}{4}=0,\\3x_0^2+a=0,\end{cases}$ 解得 $x_0=\frac{1}{2}$，$a=-\frac{3}{4}$。

因此，当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线。

(2) $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$g(x)\leqslant 0$。

$f'(x)=3x^2+a$。

(Ⅰ)当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)=3x^2+a>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(0)=\frac{1}{4}>0$。

如图3所示，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有 $x=1$ 这个零点。

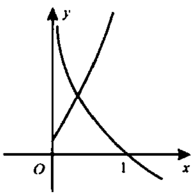


图3

(Ⅱ)当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=3x^2+a=0$，得 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$。所以当 $x\in\left(0,\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\sqrt{-\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$。故 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 上单调递增，且 $f(x)$ 的极小值 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$。

①若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)>0$，解得 $-\frac{3}{4}<a<0$。如图4所示，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有 $x=1$ 这个零点。

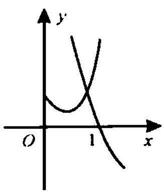


图4

②若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=0$，解得 $a=-\frac{3}{4}$。如图5所示，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 这个两个零点。

③若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)<0$，解得 $a<-\frac{3}{4}$ 时，此时 $f(1)=a+\frac{5}{4}$。因此：

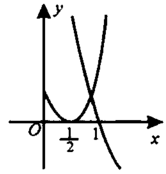


图5

1)若 $f(1)=0$，解得 $a=-\frac{5}{4}$。如图6所示，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点。

2)若 $f(1)>0$，解得 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$。如图7所示，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有3个零点。

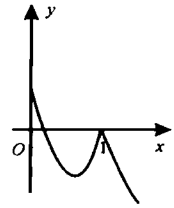


图6

3)若 $f(1)<0$，解得 $a<-\frac{5}{4}$ 时。如图8所示，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点。

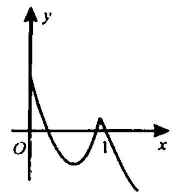


图7

综上所述，当 $a\in\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点；当 $a=-\frac{5}{4}$ 或 $a=-\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点；当 $a\in\left(-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right)$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有3个零点。

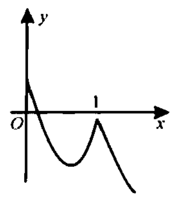


图8

上述第二问的解法非常优美，使我们感到：用数形结合思想不但回避了分类讨论带来的麻烦，而且思维更加流畅、更容易接近问题的本质。对近几年新课标全国卷的研究，我们可以发现，若要用常规思维方法解决这类问题，有一定的难度，但若能够渗透数形结合的思想方法，则很多同学都容易接受。因此我们在应引导同学们经历用数形结合思想解决数学问题的过程，积累这方面的经验，培养数形结合的能力。

5. 不等式放缩法

例17　(2014年课标Ⅰ卷理科第21题)设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线为$y=e(x-1)+2$。

(1)求a,b的值;

(2)证明:$f(x)>1$。

解析:(1)已知函数的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{ae^x}{x}-\frac{be^{x-1}}{x^2}+\frac{be^{x-1}}{x}$。

依题意可知$f(1)=2$,$f'(1)=e$,解得$a=1$,$b=2$。

(2)解法一:$f(x)=e^x\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}=e^{x-1}\cdot\left(e\ln x+\frac{2}{x}\right)(x>0)$,由指数放缩得$e^x\geqslant x+1$,所以$e^{x-1}\geqslant x$。设$g(x)=e\ln x+\frac{2}{x}(x>0)$,所以$g'(x)=\frac{e}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{ex-2}{x^2}(x>0)$。因此,当$x\in\left(0,\frac{2}{e}\right)$时,$g'(x)<0$;当$x\in\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$。所以$g(x)$在$\left(0,\frac{2}{e}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$上单调递增,$g(x)\geqslant g\left(\frac{2}{e}\right)=e\ln 2>0$。所以$f(x)=e^{x-1}\left(e\ln x+\frac{2}{x}\right)\geqslant x\left(e\ln x+\frac{2}{x}\right)=2+ex\ln x(x>0)$。设$h(x)=ex\ln x(x>0)$,则$h'(x)=e(\ln x+1)$。当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$h'(x)<0$;当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,$h'(x)>0$。所以$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增,$h(x)\geqslant h\left(\frac{1}{e}\right)=-1$。分析可知,$f(x)\geqslant x\left(e\ln x+\frac{2}{x}\right)=2+ex\ln x>2-1=1$。

解法二:$f(x)=e^x\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}>1$等价证明$e^x(x\ln x)+2e^{x-1}-x>0$。设$h(x)=x\ln x(x>0)$,则$h'(x)=\ln x+1$。故当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$h'(x)<0$;当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,$h'(x)>0$。所以$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增,$h(x)\geqslant h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$。所以$f(x)=e^x(x\ln x)+2e^{x-1}-x\geqslant e^x\left(-\frac{1}{e}\right)+2e^{x-1}-x=e^{x-1}-x$。由指数放缩得$e^x\geqslant x+1$,所以$e^{x-1}\geqslant x$,两个等号不能同时取到,故$e^x(x\ln x)+2e^{x-1}-x>0$,即得证$f(x)>1$。

放缩代换,是把指数和对数换成多项式,把复杂的关系式代换成简单的关系式,从而便于构造新函数进行求导运算。

总结一些重要的不等式放缩结论:①$e^x\geqslant x+1$;②$1-\frac{1}{x}\leqslant\ln x\leqslant x-1$;③$\frac{x-1}{x+1}\leqslant\ln x(x\geqslant1)$;④$1-\frac{1}{2}x^2\leqslant\cos x\leqslant1-\frac{1}{4}x^2(x\in[0,1])$;⑤$x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x-\frac{1}{12}x^3(x\in[0,1])$;⑥当$b>a>0$时,$b>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{a+b}{2}>\frac{b-a}{\ln b-\ln a}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}>a$。

官方提供导数压轴题参考答案,是命题专家经过反复考量的,承载着改革的理念和导向,渗透着创新精神和实践能力的培养,体现着高考改革的发展趋向。这些精心命制的压轴题具有思维跨度大、构造性强,立意新颖,抽象程度高压轴题,不仅蕴含着命题者全面综合地考查同学们的潜能和进入高校的后继学习能力,也为高校选拔人才起个标杆作用,同时也蕴含着命题者解题的思维历程,蕴含着其问题的本质。因此同学们在研究这些压轴题时应该认真思考,使自己能力获得提升,开阔解题视野,多一份解题收获。

注:本文为教育部福建师范大学基础教育课程研究中心2020年课题“高中数学‘阅读与思考’教学策略研究”的研究成果,课题编号:KCZ2020011。

(责任编辑 徐利杰)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net