不正确. 其优点是:一是贴近本质;二是既对位似图形给出了专门的定义,又对使用更频繁的位似多边形给出了定义. 不足之处:有反例,角尺 AOB 与角尺 $A'O'B'$ 满足对应点的连线过同一点,及该点到对应点的距离成比例,但显然它们不是位似关系,如图 5.

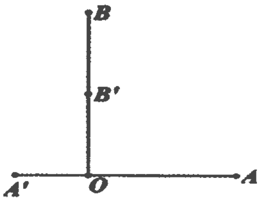

图 5

2. 完善位似图形定义的建议

实际上,教材中对位似图形定义的缺陷,无非是在内位似与外位似之间有交叉的可能. 既然如此,我们认为可增加这样一个条件:对应点均分布在该交点的同侧,或都均分布在异侧.

由此,我们这里给出一种比较恰当的定义:

如图 6 所示,如果一个图形上的点 $A,B,\cdots,P,\cdots$ 和另一个图形上的点 $A',B',\cdots,P',\cdots$ 分别对应,并且它们的连线 $AA',BB',\cdots,PP',\cdots$ 都经过同一点 O,并且它们都在 O 的同一侧(或异侧),$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\cdots=\frac{OP'}{OP}=\cdots$,那么这两个图形叫做位似图形,点 O 是位似中心.

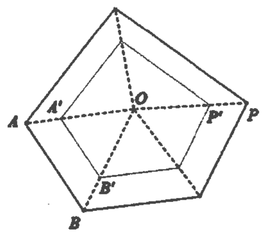

图 6

如果一个多边形上各顶点 $A,B,\cdots,P,\cdots$ 和另一个多边形上的顶点 $A',B',\cdots,P',\cdots$ 分别对应,并且它们的连线 $AA',BB',\cdots,PP',\cdots$ 都经过同一点 O,并且它们都在 O 的同一侧(或异侧),$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\cdots=\frac{OP'}{OP}=\cdots$,那么这两个多边形叫做位似多边形,点 O 是位似中心.

参考文献

[1]蔡历亮. 谈位似图形的定义[J]. 中学数学杂志. 2011,(6)25-26.
[2]罗晓丽. 关于《位似图形》的几点疑难解析[J]. 中学数学初中版. 2012,(3):6-8.
[3]叶立志. 位似图形的概念里不能添加“对应边平行”[J]. 中小学数学(初中版). 2009,(5):41-42.
[4]中学数学课程教材研究开发中心. 数学(九年级下册)[C]. 人民教育出版社. 2006.6 第 1 版(61).
[5]中学数学课程教材研究开发中心. 数学(九年级下册)[C]. 人民教育出版社. 2014.8 第 1 版(47,53).

指对数的同构命题解析

福建省泉州市第七中学　(362000)　彭耿铃

纵观近几年各省市模拟压轴题,指对数同构的好题不胜枚举,俯拾皆是,它们像一颗颗璀璨的珍珠在数学题海中闪闪发光,本文特精选举例予以分类解析,旨在探究此题型命题考查特点,仅供读者参考,希望读者能决胜于高考.

指对数同构:

①$x=e^{\ln x}$;②$x\cdot e^x=e^{\ln x}\cdot e^x=e^{x+\ln x}$;③$x+\ln x=e^{\ln x}+\ln x$;④$x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$,⑤$x^2\cdot e^x=e^{\ln x^2}\cdot e^x=e^{2\ln x+x}$;⑥$\frac{e^x}{x}=\frac{e^x}{e^{\ln x}}=e^{x-\ln x}$;⑦$x\cdot e^x=e^{x+\ln x}\geqslant(x+\ln x)+1$,当且仅当 $x+\ln x=0$ 时等号成立(利用 $e^x\geqslant x+1$ 放缩);⑧$x\cdot e^x=e^{x+\ln x}\geqslant e(x+\ln x)$,当且仅当 $x+\ln x=1$ 时等号成立(利用 $e^x\geqslant ex$ 放缩).

例 1　(2019 武汉调研)已知函数 $f(x)=e^x-a\ln(ax-a)+a(a>0)$,若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为(　　).

A. $(0,e^2]$　B. $(0,e^2)$　C. $[1,e^2]$　D. $(1,e^2)$

解析:因为 $ax-a>0$ 可得 $x>1$,故函数的定义域为 $(1,+\infty)$. 由 $f(x)>0$,即 $\frac{e^x}{a}-\ln a>\ln(x-1)-1$,由同构 $a=e^{\ln a}$,$x-1=e^{\ln(x-1)}$,故可得 $e^{x-\ln a}+(x-\ln a)>\ln(x-1)+(x-1)$,即 $e^{x-\ln a}+(x-\ln a)>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$. 设 $g(x)=e^x+x$,则 $g'(x)=e^x+1>0$,所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数. 故由 $e^{x-\ln a}+(x-\ln a)>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$,可得 $g(x-\ln a)>g(\ln(x-1))$,即 $x-\ln a>\ln(x-1)$,即 x

$-\ln(x-1)>\ln a$,所以 $\ln a<(x-\ln(x-1))_{\min}$.设 $h(x)=x-\ln(x-1)(x>1)$,则 $h'(x)=\frac{x-2}{x-1}$,故当 $x\in(1,2)$ 时,$h'(x)<0$,当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,所以 $h(x)_{\min}=h(2)=2$,所以 $\ln a<2\Rightarrow 0<a<e^2$.选 B.

例 2 (2019 深圳模拟) 设实数 $\lambda>0$,若对任意的 $x\in(0,+\infty)$,不等式 $e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$ 恒成立,则 λ 的最小值为(　　).

$A.\frac{1}{e}$　　$B.\frac{1}{2e}$　　$C.\frac{2}{e}$　　$D.\frac{e}{3}$

解析:$e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$,即 $\lambda e^{\lambda x}-\ln x\geqslant 0$,即 $\lambda xe^{\lambda x}-x\ln x\geqslant 0$,即 $\lambda xe^{\lambda x}\geqslant x\ln x$,由同构 $x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$,故可得 $(\lambda x)\cdot e^{\lambda x}\geqslant\ln x\cdot e^{\ln x}$,设 $f(x)=xe^x$,则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,所以 $(\lambda x)\cdot e^{\lambda x}\geqslant\ln x\cdot e^{\ln x}$ 可得 $f(\lambda x)\geqslant f(\ln x)$,即 $\lambda x\geqslant\ln x$,即 $\lambda\geqslant\frac{\ln x}{x}$,所以 $\lambda\geqslant(\frac{\ln x}{x})_{\max}$ 令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$,所以当 $x\in(0,e)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$,所以 $\lambda\geqslant\frac{1}{e}$,选 A.

例 3 已知函数 $f(x)=xe^{ax-1}-\ln x-ax$ 的最小值为 0,则实数 a 的最小值为________.

解析:令 $t=xe^{ax-1}$,则 $\ln t=\ln(xe^{ax-1})=\ln x+ax-1$,从而 $f(x)=g(t)=t-\ln t-1$,因为 $g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$,所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 单调递减,在 $(1,+\infty)$ 单调递增,所以 $g(t)$ 的最小值为 $g(1)=0$,此时 $t=xe^{ax-1}=1$,取对数可得 $\ln t=\ln xe^{ax-1}=\ln x+ax-1=0$,分离转化为 $a=\frac{1-\ln x}{x}$.令 $\varphi(x)=\frac{1-\ln x}{x}$,则 $\varphi'(x)=\frac{\ln x-2}{x^2}$,所以当 $x\in(0,e^2)$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 单调递减;当 $x\in(e^2,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$ 单调递增,所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(e^2)=-\frac{1}{e^2}$,所以 a 的最小值为 $-\frac{1}{e^2}$.

例 4 (2019 河南名校联考) 设实数 $m>0$,且不等式 $mx\ln x-(x+m)e^{\frac{x+m}{m}}\leqslant 0$ 对 $x>e$ 恒成立,则 m 的最大值为(　　).

$A.e$　　$B.\frac{e^2}{2}$　　$C.2e$　　$D.e^2$

解析:由 $mx\ln x-(x+m)e^{\frac{x+m}{m}}\leqslant 0$ 可得 $mx\ln x\leqslant(x+m)e^{\frac{x+m}{m}}$,即 $x\ln x\leqslant\frac{x+m}{m}e^{\frac{x+m}{m}}=e^{\frac{x+m}{m}}\ln e^{\frac{x+m}{m}}$.设 $f(x)=x\ln x$,所以 $f(x)\leqslant f(e^{\frac{x+m}{m}})$.因为 $f'(x)=\ln x+1>0$ 对 $x>e$ 恒成立,所以 $f(x)=x\ln x$ 在 $(e,+\infty)$ 单调递增,所以 $f(x)\leqslant f(e^{\frac{x+m}{m}})$ 可得 $x\leqslant e^{\frac{x+m}{m}}$,即 $\ln x\leqslant\frac{x}{m}+1$,即可得 $m\leqslant\frac{x}{\ln x-1}$ 对 $x>e$ 恒成立,所以 $m\leqslant(\frac{x}{\ln x-1})_{\min}$,设 $g(x)=\frac{x}{\ln x-1}(x>e)$,则 $g'(x)=\frac{\ln x-2}{(\ln x-1)^2}$,所以当 $x\in(e,e^2)$ 时,$g'(x)<0$;当 $x\in(e^2,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)_{\min}=g(e^2)=e^2$,故 m 的最大值为 e^2,选 D.

例 5 $xe^x-a(x+1)\geqslant\ln x$ 对 $x>0$ 恒成立,则实数 a 最大值为________.

解析:由 $xe^x-a(x+1)\geqslant\ln x$ 可得 $a\leqslant\frac{xe^x-\ln x}{x+1}$,所以 $a\leqslant(\frac{xe^x-\ln x}{x+1})_{\min}$,由同构 $x\cdot e^x=e^{\ln x}\cdot e^x=e^{\ln x+x}$,故模型⑦可得 $\frac{xe^x-\ln x}{x+1}=\frac{e^{\ln x+x}-\ln x}{x+1}\geqslant\frac{(\ln x+x+1)-\ln x}{x+1}=1$,当且仅当 $x+\ln x=0$ 时等号成立,所以实数 a 最大值为 1.

以上的几种指对数同构解析更容易接近问题的本质,使得很多同学更容易接受,解题思维更加流畅,更容易地寻找解题的方向.因此我们教师在日常的教学中,应引导学生多视角思考,引导学生经历用不同方法解决数学问题,才能有利于学生开拓数学视野,为学生的终生发展、持续发展、多元发展奠定良好的基础.

参考文献

[1]彭耿铃.对一道高考试题的再探究[J].数学通讯.2015(3 上半月).

[2]彭耿铃.巧用对数均值不等式解高考压轴题[J].中学数学研究(江西师大).2017,11.