泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学单元考（7）试卷

命题人：黄婉真　陈景文　20201227

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1, a_{n+1}=3-a_n$，则$a_{10}=$（　　）

A. -2　　B. 2　　C. 1　　D. -1

2. 已知等差数列$\{a_n\}$，且$3\left(a_3+a_5\right)+2\left(a_7+a_{10}+a_{13}\right)=48$，则数列$\{a_n\}$的前$13$项之和为（　　）

A. 24　　B. 39　　C. 52　　D. 104

3. 设$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(2+\Delta x\right)-f\left(2-\Delta x\right)}{\Delta x}=-2$，则曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(2, f\left(2\right)\right)$处的切线的倾斜角是（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}$

4. 等比数列$\left\{a_n\right\}$中各项均为正数，S_n是其前n项和，且满足$2S_3=8a_1+3a_2$，$a_4=16$，则$S_6=$（　　）

A. 32　　B. 63　　C. 123　　D. 126

5. 斐波拉契数列，指的是这样一个数列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots$，在数学上，斐波拉契数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=a_2=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$（$n\geq 3, n\in\mathbf{N}^*$），随着$n$的增大，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$越来越逼近黄金分割$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，故此数列也称黄金分割数列，而以$a_{n+1}, a_n$为长和宽的长方形称为“最美长方形”，已知某“最美长方形”的面积约为200平方厘米，则该长方形的长大约是（　　）

A. 20厘米　　B. 19厘米　　C. 18厘米　　D. 17厘米

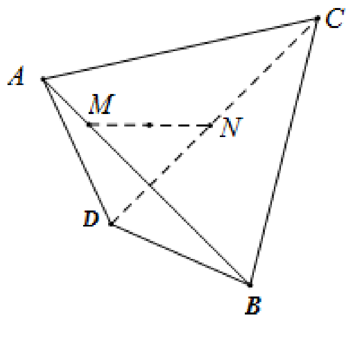
6. 数列$\{a_n\}$满足：$a_3=\dfrac{1}{5}, a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，则数列$\{a_na_{n+1}\}$前$10$项的和为（　　）

A. $\dfrac{10}{21}$　　B. $\dfrac{20}{21}$　　C. $\dfrac{9}{19}$　　D. $\dfrac{18}{19}$

7. 过抛物线$C: x^2=4y$的准线上任意一点P作抛物线的切线PA, PB，切点分别为A, B，则A点到准线的距离与B点到准线的距离之和的最小值是（　　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

8. 如图，棱长为4的正四面体$ABCD$，M, N分别是AB, CD上的动点，且$\left|MN\right|=3$，则MN中点的轨迹长度为（　　）



A. 2π　　B. π　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 已知空间中三点 $A(0,1,0)$，$B(2,2,0)$，$C(-1,3,1)$，则下列说法不正确的是（　　）

A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 是共线向量　　B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$

C. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{55}}{11}$　　D. 平面 ABC 的一个法向量是 $(1,-2,5)$

10. 若 $a>0$，$b>0$，则曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k^2\left(k\neq 0\right)$ 和 $b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2$ 具有相同的（　　）

A. 离心率　　B. 顶点　　C. 焦点　　D. 渐近线

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，前 n 项和为 S_n，且 $2a_1+2a_3=S_5$，下列结论中正确的是（　　）

A. S_7 最小　　B. $S_{13}=0$　　C. $S_4=S_9$　　D. $a_7=0$

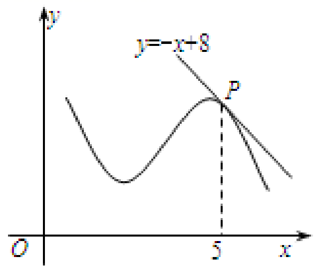
12. 在 $\triangle A_nB_nC_n$（$n=1,2,3,\cdots$）中，内角 A_n,B_n,C_n 的对边分别为 a_n,b_n,c_n，$\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n，若 $a_n=5$，$b_1=4$，$c_1=3$，且 $b_{n+1}{}^2=\frac{a_n{}^2+2c_n{}^2}{4}$，$c_{n+1}{}^2=\frac{a_n{}^2+2b_n{}^2}{4}$，则（　　）

A. $\triangle A_nB_nC_n$ 一定是直角三角形　　B. $\left\{S_n\right\}$ 为递增数列

C. $\left\{S_n\right\}$ 有最大值　　D. $\left\{S_n\right\}$ 有最小值

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 如图，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(5,f(5))$ 处的切线方程是 $y=-x+8$，则 $f(5)+f'(5)=$______.



14. 一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的三个顶点，且圆心在 x 轴的正半轴上，则该圆的标准方程为____________.

15. 设 S_n 是数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，满足 $a_n{}^2+1=2a_nS_n$，且 $a_n>0$，则 $S_{64}=$________.

16. 数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{3}{2}\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，且 $a_1=1$，则 $a_n=$__________；记数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $3\lambda\cdot\left(S_n+n\right)\leq 4$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 λ 的最大值为______.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）已知等差数列$\{a_n\}$，S_n为其前n项和，$a_5=10, S_7=56.$

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）若$b_n=a_n+(\sqrt{3})^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（本小题满分 12 分）已知函数$f(x)=2x^2-x$及点P，过点P作直线l与曲线$y=f(x)$相切.

（Ⅰ）求曲线在点$P(1,1)$处的切线l方程;

（Ⅱ）求曲线过点$P(1,0)$的切线l的斜率.

19.（本小题满分 12 分）在ΔABC中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，

若$c\cos A$，$b\cos B$，$a\cos C$成等差数列.

（Ⅰ）求B；

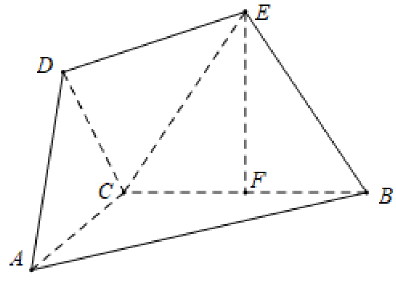
（Ⅱ）若$a+c=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，求ΔABC的面积.

20.（本小题满分 12 分）如图所示，在多面体$ABCDE$中，$DE//AB$，$AC\perp BC$，

平面$DAC\perp$平面ABC，$BC=2AC=4$，$AB=2DE$，$DA=DC$，点F为BC的中点.

（Ⅰ）证明：$EF\perp$平面ABC；

（Ⅱ）若直线BE与平面ABC所成的角为60°，求平面DCE与平面ADC所成的锐二面角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\left(n-1\right)\cdot 2^{n+1}+2\left(n\geq 1\right)$.

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\dfrac{2n+1}{a_n}$，S_n为数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和，求S_n.

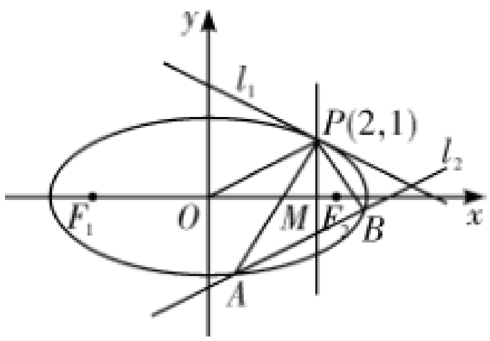
22.（本小题满分 12 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$P\left(2,1\right)$，$F_1$、$F_2$分别为椭圆$C$的左、右焦点，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-1$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过P点的直线l_1与椭圆C有且只有一个公共点，直线l_2平行于OP（O为原点），且与椭圆C交A,B两点，与直线$x=2$交于点M（M介于A,B两点之间）.

（i）当$\triangle PAB$面积最大时，求l_2的方程；

（ii）求证：$|PA|\cdot|MB|=|PB|\cdot|MA|$.



泉州七中2020-2021学年度上学期高二年数学单元考（7）试卷参考答案

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4. BCDD　5-8. CADB

8.【解析】把正四面体$ABCD$放在正方体$AFCE-HBGD$中，并建立如图所示的空间直角坐标系，

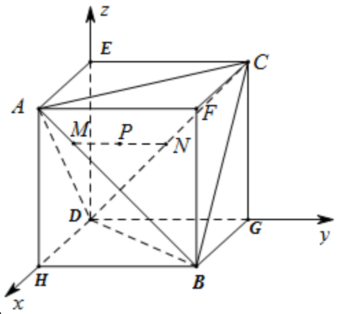
设该正方体的棱长为a，因为正四面体$ABCD$的棱长为4，所以有$\sqrt{a^2+a^2}=4\Rightarrow a=2\sqrt{2}$，

因此相应点的坐标为：$D(0,0,0),A(2\sqrt{2},0,2\sqrt{2}),B(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0),C(0,2\sqrt{2},2\sqrt{2})$，

因为N是CD上的动点，所以设点N的坐标为：$(0,n,n)$，

设$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$，$M(x_0,y_0,z_0)$，因此有$(x_0-2\sqrt{2},y_0,z_0-2\sqrt{2})=m(0,2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$，

因此$x_0=2\sqrt{2},y_0=2\sqrt{2}m,z_0=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m$，设$MN$中点为$P(x,y,z)$，



因此有：$\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\\ y=\dfrac{2\sqrt{2}m+n}{2}\\ z=\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m+n}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}m+n=2y\\ 2\sqrt{2}m-n=2\sqrt{2}-2z\end{cases}\quad(1)$，

因为$|MN|=3$，所以$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}m-n)^2+(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m-n)^2}=3$，

化简得：$(2\sqrt{2}m-n)^2+(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}m-n)^2=1(2)$，

把(1)代入(2)中得：$(y-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{4}$，

显然MN中点的轨迹是圆，半径为$\dfrac{1}{2}$，圆的周长为：$2\pi\cdot\dfrac{1}{2}=\pi$.

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分.）

9. ABC　10. AD　11. BCD　12. ABD

12.【解析】由${b_{n+1}}^2=\dfrac{{a_n}^2+2{c_n}^2}{4}$，${c_{n+1}}^2=\dfrac{{a_n}^2+2{b_n}^2}{4}$

得${b_{n+1}}^2+{c_{n+1}}^2=\dfrac{{a_n}^2+2{c_n}^2}{4}+\dfrac{{a_n}^2+2{b_n}^2}{4}=\dfrac{1}{2}{a_n}^2+\dfrac{1}{2}\left({b_n}^2+{c_n}^2\right)=\dfrac{25}{2}+\dfrac{1}{2}\left({b_n}^2+{c_n}^2\right)$，

故${b_{n+1}}^2+{c_{n+1}}^2-25=\dfrac{1}{2}\left({b_n}^2+{c_n}^2-25\right)$，又${b_1}^2+{c_1}^2-25=0$，$\therefore {b_n}^2+{c_n}^2-25=0$，

$\therefore {b_n}^2+{c_n}^2=25={a_n}^2$，故$\triangle A_nB_nC_n$一定是直角三角形，A正确；

$\triangle A_nB_nC_n$的面积为$S_n=\dfrac{1}{2}b_nc_n$，

而${b_{n+1}}^2{c_{n+1}}^2=\dfrac{{a_n}^2+2{c_n}^2}{4}\times\dfrac{{a_n}^2+2{b_n}^2}{4}=\dfrac{{a_n}^4+2\left({b_n}^2+{c_n}^2\right){a_n}^2+4{b_n}^2{c_n}^2}{16}$，

故$4{S_{n+1}}^2={b_{n+1}}^2{c_{n+1}}^2=\dfrac{{a_n}^4+2\left({b_n}^2+{c_n}^2\right){a_n}^2+4{b_n}^2{c_n}^2}{16}=\dfrac{1875+16{S_n}^2}{16}=\dfrac{1875}{16}+{S_n}^2$，

故${S_{n+1}}^2-{S_n}^2=\dfrac{1875}{64}+\dfrac{{S_n}^2}{4}-{S_n}^2=\dfrac{1875}{64}-\dfrac{3{S_n}^2}{4}$，

又$S_n=\dfrac{1}{2}b_nc_n\le\dfrac{{b_n}^2+{c_n}^2}{4}=\dfrac{25}{4}$（当且仅当$b_n=c_n=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$时等号成立）

$\therefore S_{n+1}{}^2-S_n{}^2=\dfrac{1875}{64}-\dfrac{3S_n{}^2}{4}\geq 0$，又由$b_1=4$，$c_1=3$知$b_n\neq c_n$不是恒成立，即$S_{n+1}{}^2>S_n{}^2$，

故$S_{n+1}>S_n$，故$\{S_n\}$为递增数列，$\{S_n\}$有最小值$S_1=6$，无最大值，故 BD 正确，C 错误.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 2　14. $(x-\dfrac{3}{2})^2+y^2=\dfrac{25}{4}$　15. 8　16. $a_n=2\cdot(-\dfrac{1}{2})^{n-1}-1$；$\dfrac{2}{3}$

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）

解:（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则根据题意得:

由$\begin{cases}S_7=7a_1+21d=56\\a_5=a_1+4d=10\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$，　……………………………4 分

所以$a_n=2n$　……………………………5 分

（Ⅱ）$b_n=a_n+\left(\sqrt{3}\right)^{a_n}=2n+3^n$，则　……………………………6 分

$T_n=(2+3^1)+(4+3^2)+(6+3^3)+\cdots+(2n+3^n)$

$=(2+4+\cdots+2n)+(3+3^2+\cdots+3^n)$　……………………………8 分

$=\dfrac{n(2+2n)}{2}+\dfrac{3\times(1-3^n)}{1-3}=n^2+n+\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$.　……………………………10 分

18.（本小题满分 12 分）

解:（Ⅰ）因为$f\left(x\right)=2x^2-x$，所以$f'(x)=4x-1$，　……………………………2 分

所以切线l的斜率为$f'(1)=4-1=3$，又$f(1)=2-1=1$，　……………………………5 分

所以切线l方程为$y-1=3(x-1)$，即$3x-y-2=0$.　……………………………6 分

（Ⅱ）设切点为$(x_0,2x_0^2-x_0)$，则$4x_0-1=\dfrac{2x_0^2-x_0-0}{x_0-1}$，整理得$2x_0^2-4x_0+1=0$，……………9 分

解得$x_0=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$x_0=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　……………………………11 分

所以切线l的斜率为$3+2\sqrt{2}$或$3-2\sqrt{2}$，　……………………………12 分

综上所述：切线l的斜率为$3+2\sqrt{2}$或$3-2\sqrt{2}$

19.（本小题满分 12 分）

解:（Ⅰ）$\because c\cos A$，$b\cos B$，$a\cos C$成等差数列, $\therefore 2b\cos B=c\cos A+a\cos C$，……………………1 分

由正弦定理$2\sin B\cos B=\sin C\cos A+\sin A\cos C$，即$2\sin B\cos B=\sin\left(A+C\right)$. …………3 分

又$A+C=\pi-B$，$\therefore 2\sin B\cos B=\sin\left(\pi-B\right)$，即$2\sin B\cos B=\sin B$. ……………………4 分

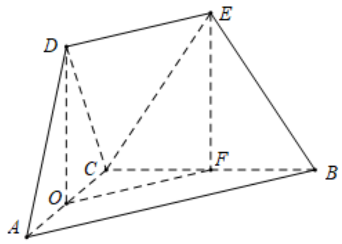
而$\sin B\neq 0$，$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，由$0<B<\pi$，得$B=\dfrac{\pi}{3}$.　……………………………6 分

（Ⅱ）$\because \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{\left(a+c\right)^2-2ac-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，　……………………………8 分

又$a+c=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{27}{4}-2ac-3=ac$，即$ac=\dfrac{5}{4}$，　……………………………10 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}acsinB=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{16}$.　……………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）



解：（Ⅰ）取 AC 的中点 O，连接 DO,OF， ……………………………1 分

$\because$ 在 $\triangle DAC$ 中，$DA=DC$，$\therefore DO\perp AC$，…………2 分

又面 $DAC\perp$ 面 ABC，且交线为 AC，$\therefore DO\perp$ 面 ABC，……3 分

$\because O$，F 分别为 AC，BC 的中点，$\therefore OF//AB$，且 $AB=2OF$，

又 $DE//AB$，$AB=2DE$，所以 $OF=DE$，

$\therefore$ 四边形 $DEFO$ 为平行四边形，$\therefore EF//DO$，…………4 分

$\therefore EF\perp$ 平面 ABC； ………………………………5 分

（Ⅱ）$\because DO\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，平面 $DAC\perp$ 平面 ABC，所以 $BC\perp$ 平面 ADC；

$\therefore$ 以 O 为原点，OA 为 x 轴，过点 O 与 CB 平行的直线为 y 轴，OD 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

因为 $BC=2AC=4$，$AB=2DE$，$DA=DC$，点 F 为 BC 的中点，

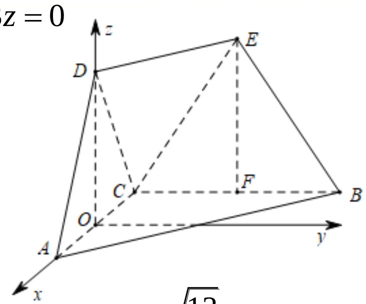
则 $A(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$B(-1,4,0)$，…………………………6 分

$\because EF\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 直线 BE 与平面 ABC 所成角为 $\angle EBF=60^\circ$，

$\therefore DO=EF=BF\tan 60^\circ=2\sqrt{3}$，$\therefore D\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$E\left(-1,2,2\sqrt{3}\right)$，………………7 分

取平面 ADC 的一个法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，设平面 DCE 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{CD}=\left(1,0,2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(0,2,2\sqrt{3}\right)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=x+2\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=2y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，



取 $z=1$，得 $\vec{n}=\left(-2\sqrt{3},-\sqrt{3},1\right)$，……………………10 分

因此平面 DCE 与平面 ADC 所成的锐二面角为 θ，

$\therefore \cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|-\sqrt{3}|}{1\times 4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，…………11 分

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ 即面 DCE 与面 ADC 所成的锐二面角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$. ………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）当 $n\geq 2$ 时，由 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2(n\geq 1)$，①

得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)\cdot 2^n+2(n\geq 2)$，②…………………………1 分

①-②得 $na_n=\left[(n-1)\cdot 2^{n+1}+2\right]-\left[(n-2)\cdot 2^n+2\right]=n\cdot 2^n(n\geq 2)$，即 $a_n=2^n(n\geq 2)$ …3 分

当 $n=1$ 是，$a_1=2$. 满足上式 ……………………………5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$. …………………………6 分

（Ⅱ）由题意 $b_n=\dfrac{2n+1}{a_n}=\dfrac{2n+1}{2^n}$，

所以 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots b_n=\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots\dfrac{2n+1}{2^n}$， ③

$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n+1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$， ④ …………………………7 分

③-④，得 $\dfrac{1}{2}S_n=\left[\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots\dfrac{2n+1}{2^n}\right]-\left[\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n+1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}\right]$

$=\dfrac{3}{2}+2\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$ …………………………9 分

$$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{5}{2}-(2n+5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$ ························11 分

从而 $S_n=-(2n+5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+5$. ························12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）设 $F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$，则 $\overrightarrow{PF_1}=(-c-2,-1)$， $\overrightarrow{PF_2}=(c-2,-1)$，

$\because \overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-c^2+4+1=-1$， $\therefore c=\sqrt{6}$， ······························1 分

又 $P(2,1)$ 在椭圆上，故 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$， ························2 分

又 $a^2=b^2+6$，解得 $a^2=8$， $b^2=2$， ·····························3 分

故所求椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ····························4 分

（Ⅱ）（i）由于 $k_{OP}=\frac{1}{2}$，设 l_2 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+t$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+t\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去 y 整理得 $x^2+2tx+2t^2-4=0$， ······························5 分

由韦达定理可得： $x_1+x_2=-2t$， $x_1x_2=2t^2-4$， $\Delta=-4(t^2-4)>0\Rightarrow t^2<4$ ············6 分

则 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{4t^2-4(2t^2-4)}=\sqrt{5}\sqrt{4-t^2}$， ···············7 分

又点 P 到 l_2 的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{2|t|}{\sqrt{5}}$， ······························8 分

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{4-t^2}\cdot\frac{2|t|}{\sqrt{5}}=\sqrt{(4-t^2)t^2}\le\frac{t^2+(4-t^2)}{2}=2$.

当且仅当 $4-t^2=t^2$，即 $t^2=2$ 时，等号成立. 又 M 介于 A、B 两点之间，故 $t=-\sqrt{2}$.

故直线 AB 的方程为： $y=\frac{1}{2}x-\sqrt{2}$. ··························9 分

（ii）要证结论成立，只须证明 $\frac{|PA|}{|MA|}=\frac{|PB|}{|MB|}$，由角平分线性质即证直线 $x=2$ 为 $\angle APB$ 的平分线，

转化成证明： $k_{PA}+k_{PB}=0$. ··························10 分

由于 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{\left[\left(\frac{1}{2}x_1+t\right)-1\right](x_2-2)+\left[\left(\frac{1}{2}x_2+t\right)-1\right](x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$$=\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-4(t-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2t^2-4-2t(t-2)-4(t-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{-4+4t-4t+4}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$$

因此结论成立. ·····················12 分