泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学单元考（3）试卷

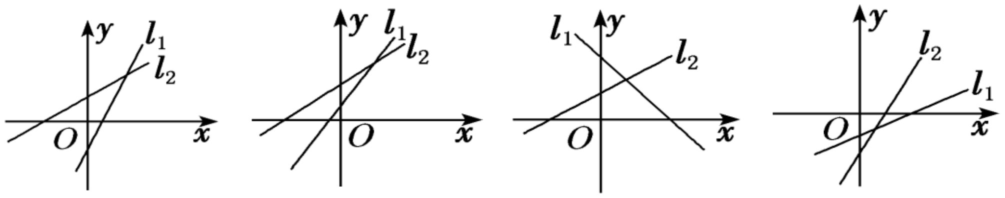
命题人：彭耿铃　饶真平　20200927

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知向量 $\vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(-1,0,2)$，且 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 互相垂直，则 k 的值是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{5}{3}$　　D. $\dfrac{7}{5}$

2. 直线 $l_1: y=ax+b$ 与直线 $l_2: y=bx+a$（$ab\neq 0, a\neq b$）在同一平面直角坐标系内的图象只可能是（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

3. 已知点 $A(2,0),B(3,m)$，$m\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$，则直线 AB 的倾斜角的取值范围为（　　）

A. $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$　　B. $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$

C. $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$　　D. $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

4. 要得到函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2 x+\sin x\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的图象，只需把函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象（　　）

A. 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

5. 点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $3x+4y-4=0$ 距离的最大值为（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. 1　　D. $\dfrac{9}{5}$

6. 已知直线 $(k+1)x+(k-1)y-5k-3=0$ 恒过定点 $P(m,n)$，若正实数 a,b 满足 $\dfrac{m}{a}+\dfrac{n}{b}=1$，

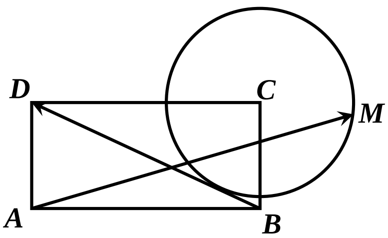
则 $a+b$ 的最小值为（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

7. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $(a+b)(\sin A-\sin B)=c(\sin C+\sin B)$，$b+c=4$，

则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1



8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC=2$，动点 M 在以点 C 为圆心，且与 BD 相切的圆上，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的最大值为（　　）

A. -1　　B. 5　　C. $-3+\sqrt{5}$　　D. $3+\sqrt{5}$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 关于空间向量，以下说法正确的是（　　）

A. 空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面

B. 若对空间中任意一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，则 P,A,B,C 四点共面

C. 设 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 是空间中的一组基底，则 $\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\right\}$ 也是空间的一组基底

D. 若向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，则向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角是钝角

10. 给出下列四个结论，正确的是（　　）

A．方程 $k=\frac{y-2}{x+1}$ 与方程 $y-2=k(x+1)$ 可表示同一直线

B．直线 l 过点 $P(x_1,y_1)$，倾斜角为 90°，则其方程是 $x=x_1$

C．直线 l 过点 $P(x_1,y_1)$，斜率为 0，则其方程是 $y=y_1$

D．所有的直线都有点斜式和斜截式方程

11. 某同学在研究函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}+\left|x-1\right|$ 的性质时，联想到两点间的距离公式，从而将函数变形为 $f\left(x\right)=\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(0-1\right)^2}+\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(0-0\right)^2}$，则下列结论正确的是（　　）

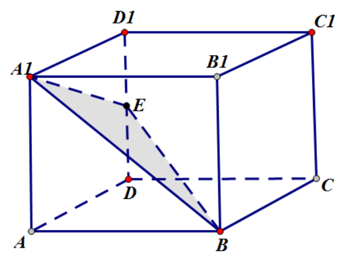
A. 函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减，$\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增

B. 函数 $f\left(x\right)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$，没有最大值

C. 存在实数 t，使得函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=t$ 对称

D. 方程 $f\left(x\right)=2$ 的实根个数为 2

12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 DD_1 的中点，F 是侧面 CDD_1C_1 上的动点，且 B_1F // 平面 A_1BE，记 B_1 与 F 的轨迹构成的平面为 α．下列命题正确的序号是（　　）



A. $\exists F$，使得 $B_1F\perp CD_1$

B. 直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正切值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right]$

C. α 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$

D. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个侧面中，与 α 所成的锐二面角相等的侧面共 5 个.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

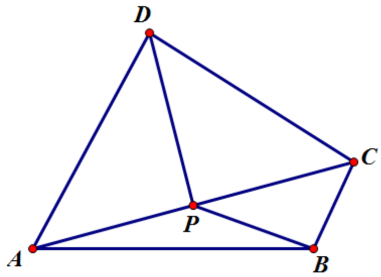
13. 已知两直线 $l_1: 2x-y+7=0$，$l_2: x+y-1=0$，则直线 l_1,l_2 交点 A 的坐标为__________；若直线 l 过点 A 且与直线 l_1 垂直，则直线 l 的方程是____________________.

14. 直线 l 过点 $P(-3,2)$ 且斜率为 1，则 l 的方程为_____________；原点关于 l 的对称点坐标是_______.

15. 过点 $P(3,2)$ 的直线 l 与 x,y 轴正方向交于 M,N 两点，O 为坐标原点，则 $S_{\Delta MON}$ 的最小值为_______；当 $|PM|\cdot|PN|$ 取到最小值时 l 的方程为____________________.（用一般式表示）

16. 如图，在平面凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=2BC=4$，P 为对角线 AC 的中点. 若 $PD=\sqrt{3}PB$.

则 $PD=$______，$\angle ABC=$______.



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）

（1）已知直线 $m: ax+2y-3=0$, 直线 $n: 3x+(a+1)y-a=0$，且 $m//n$；求实数 a 的值.

（2）求经过点 $B(2,7)$ 且在两条坐标轴上的截距相等的直线方程.

18.（本小题满分 12 分）已知圆 C 过点 $A(-5,1), B(2,2)$，且圆心 C 在直线 $m: x-2y-3=0$ 上

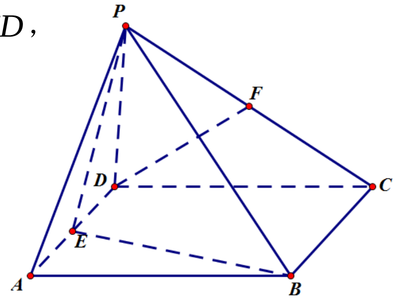
（Ⅰ）求圆 C 的标准方程;

（Ⅱ）求过 $P(4,5)$ 且与圆 C 相切的直线 l 方程（用一般式表示）.

19.（本小题满分 12 分）如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=DC=2$，点 E，F 分别为 AD，PC 的中点.

（Ⅰ）证明：$DF//$ 平面 PBE；

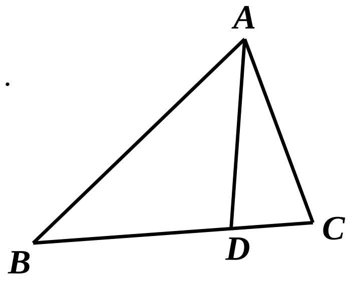
（Ⅱ）求点 F 到平面 PBE 的距离.



20.（本小题满分 12 分）$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $c\cos A+\sqrt{3}c\sin A=b+a$.

（Ⅰ）求 C；

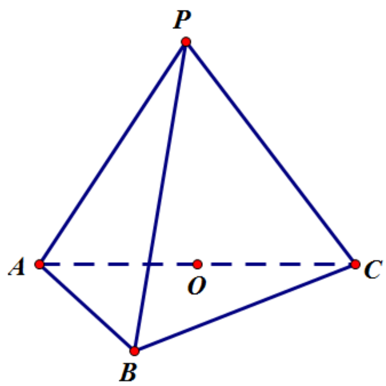
（Ⅱ）若 D 在边 BC 上，且 $BD=3DC$, $\cos B=\frac{11}{14}$, $S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}$，求 AD.



21.（本小题满分 12 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.

（Ⅰ）证明：$PO\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）若点 M 在棱 BC 上，且二面角 $M-PA-C$ 为 30°，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.



22.（本小题满分 12 分）已知圆 $O: x^2+y^2=1$ 与 x 轴的正半轴交于点 P，直线 $l: kx-y-k+3=0$ 与圆 O 交于不同的两点 A,B.

（Ⅰ）求实数 k 的取值范围；

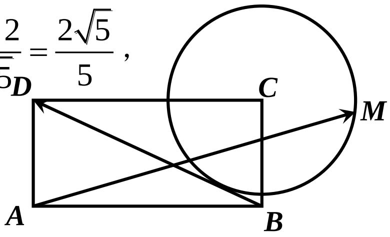
（Ⅱ）设直线 PA,PB 的斜率分别是 k_1,k_2，试问 k_1+k_2 是否为定值？若是定值，求出该定值；若不是定值，请说明理由；

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学单元考（3）试卷参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4:DBBC　5-8:DACA

8.【解析】由题意知 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{5}$，设 C 到 BD 的距离为 d，则有 $d=\dfrac{1\times 2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，



故 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BD}$，

其中 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=-3$，

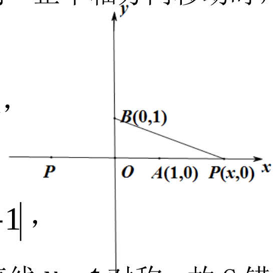
$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BD}\leqslant\left|\overrightarrow{CM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|=2$，当且仅当 $\overrightarrow{CM}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向时，等号成立，故选 A.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. ABC　10. BC　11. ABD　12. ABC

11.【解析】设点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，函数 $f(x)=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(0-0)^2}$

表示 x 轴上的点 $P(x,0)$ 到 A,B 两点的距离之和，由图可知，点 P 由 x 负半轴方向向原点 O 移动时，$|PA|+|PB|$ 逐渐变小，即 $f(x)$ 区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，当点 P 由点 A 向 x 正半轴方向移动时，$|PA|+|PB|$ 逐渐变大，即函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，A 正确；



当点 P 移动到点 A 时，$|PA|+|PB|$ 的和最小，最小值为 $\sqrt{2}$，没有最大值，

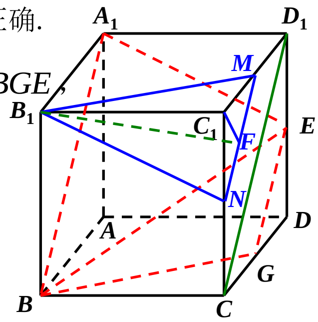
即函数 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$，没有最大值，故 B 正确；

$f(t+x)=\sqrt{(t+x)^2+1}+|t+x-1|$，而 $f(t-x)=\sqrt{(t-x)^2+1}+|t-x-1|$，

显然 $f(t+x)\neq f(t-x)$，故不存在实数 t，使得函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=t$ 对称，故 C 错误；

方程 $f(x)=2$ 即 $\sqrt{x^2+1}+|x-1|=2$，解之得：$x=\dfrac{4}{3}$ 或 $x=0$，故 D 正确.

12.【解析】取 CD 中点 G，连接 EG，则 $EG//A_1B$，所以平面 A_1BE 即为平面 A_1BGE，



取 C_1D_1 中点 M，CC_1 中点 N，连接 B_1M, B_1N, MN，

则易证得 $B_1M//BG, B_1N//A_1E$，从而平面 $B_1MN//$ 平面 A_1BGE，

所以点 F 的运动轨迹为线段 MN，平面 B_1MN 即为平面 α.

①取 F 为 MN 中点，因为 $\triangle B_1MN$ 是等腰三角形，所以 $B_1F\perp MN$，

又因为 $MN//CD_1$，所以 $B_1F\perp CD_1$，故 A 正确；

②设正方体的棱长为 2，当点 F 为 MN 中点时，直线 B_1F 与直线 BC 所成角最小，

此时 $C_1F=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle C_1B_1F=\dfrac{C_1F}{B_1C_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

当点 F 与点 M 或点 N 重合时，直线 B_1F 与直线 BC 所成角最大，此时 $\tan\angle C_1B_1F=\dfrac{1}{2}$，

所以直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正切值的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{1}{2}\right]$，B 正确；

③取 F 为 MN 中点，则 $MN\perp C_1F, MN\perp B_1F$，$\therefore\angle B_1FC_1$ 即为 α 与平面 CDD_1C_1 所成的锐二面角，

$\tan\angle B_1FC_1=\dfrac{B_1C_1}{C_1F}=2\sqrt{2}$，所以 C 正确；

④正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个侧面中，平面 $ABCD$，平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 BCC_1B_1，平面 ADD_1A_1 与平面 α 所成的角相等，所以 D 错误.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. $(-2,3)$；$x+2y-4=0$　14. $x-y+5=0$；$(-5,5)$　15. 12；$x+y-5=0$　16. 3；$\dfrac{2\pi}{3}$

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）由题意可知 $a(a+1)=2\times3$，解得 $a=2$ 或 $a=-3$ ……3 分

①当 $a=-3$ 时，直线 m,n 重合（舍去） ……4 分

②当 $a=2$ 时，直线 m,n 平行，合题意 ……5 分

综上，$a=2$

法二：直线 l_1 可化为 $y=-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{3}{2}$ ……1 分

①当 $a=-1$ 时，$l_2: x=-\dfrac{1}{3}$ 与 l_1 不平行……3 分

②当 $a\neq-1$ 时，直线 $l_2: y=-\dfrac{3}{a+1}x+\dfrac{a}{a+1}$ ……4 分

$\because l_1 /\!/ l_2$，$\therefore \dfrac{-a}{2}=-\dfrac{3}{a+1}$ 且 $\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{a}{a+1}\,\dfrac{3}{2}$，解得 $a=2$ ……5 分

（2）①当所求的直线与两条坐标轴上的截距均为0 时，

因为直线经过点 $B(2,7)$，所以该直线方程为 $7x-2y=0$ ……7 分

②当所求的直线与两条坐标轴上的截距相等且不为 0 时，则设该直线方程为 $x+y+b=0$ …9 分

将点 $B(2,7)$ 代入方程得 $b=-9$，即所求的直线方程为 $x+y-9=0$ ……10 分

综上，所求直线方程为 $7x-2y=0$ 或 $x+y-9=0$

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$\because$ 圆心在直线 $x-2y-3=0$ 上，$\therefore$ 可设圆心为 $(2t+3,t)$ ……1 分

则 $r=\sqrt{(2t+3+5)^2+(t-1)^2}=\sqrt{(2t+3-2)^2+(t-2)^2}$ ……3 分

解得 $t=-2, r=5$，则圆心为 $(-1,-2)$ ……5 分

$\therefore$ 圆的方程为：$(x+1)^2+(y+2)^2=25$ ……6 分

（Ⅱ）①若直线 l 的斜率不存在，则 $l: x=4$ 与圆 C 相切，故 $x=4$ 符合题意 ……8 分

②若直线 l 的斜率不存在，不妨设为 k，则 $l: y-5=k(x-4)$ 即 $kx-y+5-4k=0$ ……9 分

由直线 l 与圆 C 相切得 $\dfrac{|-k+2+5-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=5\Rightarrow k=\dfrac{12}{35}$ ……11 分

所以过 $P(4,5)$ 且与圆 C 相切的直线 l 方程为 $x-4=0$ 或 $12x-35y+127=0$ ……12 分

19.（本小题满分 12 分）

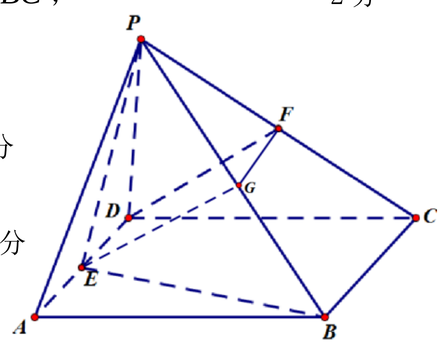
解：（Ⅰ）取点 G 是 PB 的中点，连接 EG,FG，则 $FG/\!/BC$，$FG=\dfrac{1}{2}BC$， ……2 分

$\because DE/\!/BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{2}BC$，$\therefore DE/\!/FG$ 且 $DE=FG$

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 为平行四边形，$\therefore DF/\!/EG$， ……4 分

又 $\because DF\not\subset$ 平面 PBE，$EG\subset$ 平面 PBE

$\therefore DF/\!/$ 平面 PBE． ……6 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $DF/\!/$ 平面 PBE，

所以点D到平面PBE的距离与F到平面PBE的距离是相等的，……………………………7 分

故转化为求点D到平面PBE的距离，设为d．

利用等体积法：$V_{D-PBE}=V_{P-BDE}$，即$\frac{1}{3}S_{\Delta PBE}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\Delta BDE}\cdot PD$，……………………………9 分

$S_{\Delta BDE}=\frac{1}{2}\times DE\times AB=1$，$\because PE=BE=\sqrt{5}$，$PB=2\sqrt{3}$，$\therefore S_{\Delta PBE}=\sqrt{6}$，…………11 分

$\therefore d=\frac{\sqrt{6}}{3}$．……………………………………………………12 分

法二：以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$的方向分别为$x,y,z$轴正方向，建立空间直角坐标系

则$D(0,0,0)$，$E(1,0,0)$，$B(2,2,0)$，$P(0,0,2)$，$F(0,1,1)$……………………………7 分

所以$\overrightarrow{EB}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{EP}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{PF}=(0,1,-1)$……………………………8 分

设平面PBE的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+2y=0\\ -x+2z=0\end{cases}$，取$x=2$，则$\vec{n}=(2,-1,1)$……………………10 分

所以F到平面PBE的距离$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF}|}{|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$……………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，因为$c\cos A+\sqrt{3}c\sin A=b+a$，

所以$\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin B+\sin A$．……………………………1 分

又$A+B+C=\pi$，所以$\sin B=\sin(A+C)$，……………………………………2 分

所以$\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin(A+C)+\sin A$，

则$\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A$，………………3 分

即$\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin A\cos C+\sin A$．……………………………………4 分

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sqrt{3}\sin C=\cos C+1$，即$\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$．…………………5 分

因为$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$．……………………………………………6 分

（Ⅱ）因为$\cos B=\frac{11}{14}$，所以$\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，……………………………………7 分

所以$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{2}+\frac{11}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$．………8 分

所以$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=8:5:7$，不妨设$a=8t,b=5t,c=7t$．……………9 分

因为$S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 8t\times 5t\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$，解得$t=1$，…………10 分

即$a=8,b=5,c=7$，因为$BD=3DC$，所以$BD=6,DC=2$．…………………11 分

在$\triangle ADC$中，由余弦定理得$AD^2=CD^2+CA^2-2CD\cdot CA\cdot\cos C=19$，

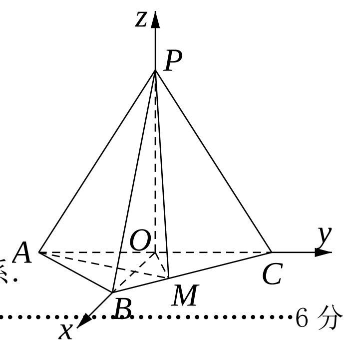
$\therefore AD=\sqrt{19}$．……………………………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）因为$AP=CP=AC=4$，O为AC的中点，所以$OP\perp AC$，且$OP=2\sqrt{3}$．……………1 分

连结OB．因为$AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形，

且 $OB \perp AC$，$OB = \frac{1}{2}AC = 2$．



由 $OP^2 + OB^2 = PB^2$ 知 $PO \perp OB$．……………………………3 分

由因为 $AC \cap OB = O$，$OB, AC \subset$ 平面 ABC

所以 $PO \perp$ 平面 ABC．………………………………………………5 分

（Ⅱ）如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向，建立空间直角坐标系．

则 $O(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，……………………………6 分

$\overrightarrow{AP} = (0,2,2\sqrt{3})$，取平面 PAC 的法向量 $\overrightarrow{OB} = (2,0,0)$．………………………………………7 分

设 $M(a, 2-a, 0)(0 < a \leqslant 2)$，则 $\overrightarrow{AM} = (a, 4-a, 0)$．

设平面 PAM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$．

由 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0, \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ 得 $\begin{cases} 2y + 2\sqrt{3}z = 0 \\ ax + (4-a)y = 0 \end{cases}$，可取 $\vec{n} = (\sqrt{3}(a-4), \sqrt{3}a, -a)$，…………………9 分

所以 $\cos\left\langle \overrightarrow{OB}, \vec{n} \right\rangle = \dfrac{2\sqrt{3}(a-4)}{2\sqrt{3(a-4)^2 + 3a^2 + a^2}}$．由已知得 $|\cos\left\langle \overrightarrow{OB}, \vec{n} \right\rangle| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

所以 $\dfrac{2\sqrt{3}\,|a-4|}{2\sqrt{3(a-4)^2 + 3a^2 + a^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．解得 $a = -4$（舍去），$a = \dfrac{4}{3}$．……………………………………10 分

所以 $\vec{n} = (-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{4}{3})$．又 $\overrightarrow{PC} = (0, 2, -2\sqrt{3})$，所以 $\cos\left\langle \overrightarrow{PC}, \vec{n} \right\rangle = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$．…………………11 分

所以 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．………………………………………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：$\because$ 圆 O：$x^2 + y^2 = 1$ 与 x 轴的正半轴交于点 P，

$\therefore$ 圆心 $O(0,0)$，半径 $r = 1$，$P(1,0)$．………………………………………………1 分

（Ⅰ）$\because$ 直线 l：$kx - y - k + 3 = 0$ 与圆 O 交于不同的两点 A, B，

$\therefore$ 圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \dfrac{|k-3|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$，………………………………………………3 分

即 $|k-3| < \sqrt{k^2+1}$，解得 $k > \dfrac{4}{3}$．………………………………………………5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$

联立 $\begin{cases} kx - y - k + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$，可得 $(1+k^2)x^2 - (2k^2 - 6k)x + k^2 - 6k + 8 = 0$，…………………6 分

$\therefore x_1 + x_2 = \dfrac{2k^2 - 6k}{1+k^2}$，$x_1 x_2 = \dfrac{k^2 - 6k + 8}{1+k^2}$，………………………………………………8 分

$\therefore k_1 + k_2 = \dfrac{y_1}{x_1 - 1} + \dfrac{y_2}{x_2 - 1} = \dfrac{k(x_1 - 1) + 3}{x_1 - 1} + \dfrac{k(x_2 - 1) + 3}{x_2 - 1} = 2k + \dfrac{3}{x_1 - 1} + \dfrac{3}{x_2 - 1}$ ………………10 分

$= 2k + \dfrac{3(x_1 + x_2 - 2)}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = 2k + \dfrac{3[2k^2 - 6k - 2(1+k^2)]}{k^2 - 6k + 8 - (2k^2 - 6k) + 1 + k^2}$

$= 2k + \dfrac{-18k - 6}{9} = -\dfrac{2}{3}$ 为定值.

$\therefore k_1 + k_2$ 是定值，定值为 $-\dfrac{2}{3}$．………………………………………………12 分