# 泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（二）

命题人：陈景文　黄婉真　20200919

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 的倾斜角是（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

2. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，向量 $\vec{a}=(x,1,1),\vec{b}=(1,y,1),\vec{c}=(2,-4,2)$，$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}//\vec{c}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $3$　　D. $4$

3. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若点 $F$ 是侧面 $CD_1$ 的中心，且 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+m\overrightarrow{AB}-n\overrightarrow{AA_1}$，则 $m,n$ 的值分别为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$

4. 一个向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 下的坐标为 $(1,2,3)$，则 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\}$ 下的坐标为（　　）

A. $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},3\right)$　　B. $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},3\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2},3\right)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},3\right)$

5. 对于空间任意一点 $O$ 和不共线的三点 $A,B,C$ 有 $6\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$，则（　　）

A. 四点 $O$，$A$，$B$，$C$ 必共面　　B. 四点 $P$，$A$，$B$，$C$ 必共面

C. 四点 $O$，$P$，$B$，$C$ 必共面　　D. 五点 $O$，$P$，$A$，$B$，$C$ 必共面

6. 已知点 $A(2,-3)$，$B(-3,-2)$，直线 $l$ 方程为 $kx-y-k+1=0$，且直线 $l$ 与线段 $AB$ 相交，求直线 $l$ 的斜率 $k$ 的取值范围为（　　）

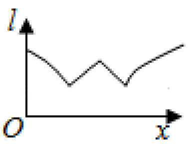
A. $k\geq\dfrac{3}{4}$ 或 $k\leq-4$　　B. $k\geq\dfrac{3}{4}$ 或 $k\leq-\dfrac{1}{4}$

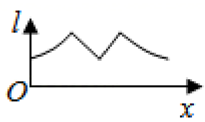
C. $-4\leq k\leq\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}\leq k\leq 4$

7. 已知 $MN$ 是正方体内切球的一条直径，点 $P$ 在正方体表面上运动，正方体的棱长是 $2$，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围为（　　）

A. $[0,4]$　　B. $[0,2]$　　C. $[1,4]$　　D. $[1,2]$

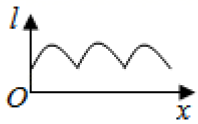
8. 如图为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，动点 $M$ 从 $B_1$ 点出发，在正方体表面沿逆时针方向运动一周后，再回到 $B_1$ 的运动过程中，点 $M$ 与平面 $A_1DC_1$ 的距离保持不变，运动的路程 $x$ 与 $l=MA_1+MC_1+MD$ 之间满足函数关系 $l=f(x)$，则此函数图象大致是（　　）

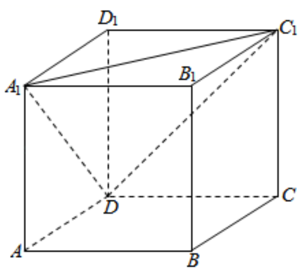
A.



B.



C.



D.


**二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）**

9. 已知直线 $l:(a^2+a+1)x-y+1=0$，其中 $a\in\mathbf{R}$，下列说法正确的是（　　）

A. 当 $a=-1$ 时，直线 $l$ 与直线 $x+y=0$ 垂直　　B. 若直线 $l$ 与直线 $x-y=0$ 平行，则 $a=0$

C. 直线 $l$ 过定点 $(0,1)$　　D. 当 $a=0$ 时，直线 $l$ 在两坐标轴上的截距相等

10. 对于任意非零向量 $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，以下说法错误的有（　　）

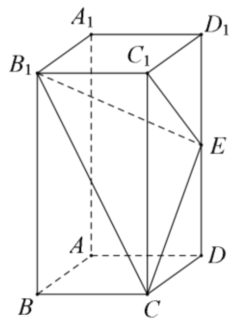
A. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$　　B. 若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

C. $\cos<\vec{a}.\vec{b}>=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$　　D. 若 $x_1=y_1=z_1=1$，则 $\vec{a}$ 为单位向量

11. 已知直线 $l_1:x-y-1=0$，动直线 $l_2:(k+1)x+ky+k=0(k\in\mathbf{R})$，则下列结论错误的是（　　）

A. 不存在 $k$，使得 $l_2$ 的倾斜角为 $90^\circ$　　B. 对任意的 $k$，$l_1$ 与 $l_2$ 都有公共点

C. 对任意的 $k$，$l_1$ 与 $l_2$ 都不重合　　D. 对任意的 $k$，$l_1$ 与 $l_2$ 都不垂直




12. 若长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 2 的正方形，高为 4，$E$ 是 $DD_1$ 的中点，则（　　）

A. $B_1E\perp A_1B$　　B. 平面 $B_1CE//$ 平面 $A_1BD$

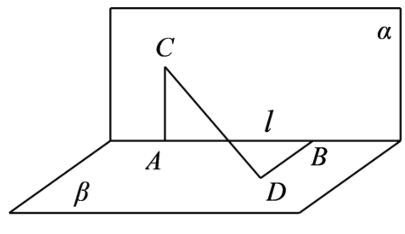
C. 三棱锥 $C_1-B_1CE$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$　　D. 三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 的外接球的表面积为 $24\pi$

**三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）**

13. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=2$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$________.

14. 已知直线 $l_1:mx+3y=2-m$，$l_2:x+(m+2)y=1$.

若 $l_1\perp l_2$，则实数 $m=$ ________；若 $l_1//l_2$，则实数 $m=$________.




15. 如图，已知平面 $\alpha\perp$ 平面 $\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$A\in l$，$B\in l$，

$AC\subset\alpha$，$BD\subset\beta$，$AC\perp l$，$BD\perp l$，

且 $AB=4$，$AC=3$，$BD=12$，则 $CD=$______________.

16. 已知 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是空间单位向量，$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\dfrac{1}{2}$，若空间向量 $\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}_1=2$，$\vec{b}\cdot\vec{e}_2=\dfrac{5}{2}$，

且对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$f\left(x,y\right)=\left|\vec{b}-\left(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2\right)\right|$ 的最小值为________，此时 $x+y=$_______.

**四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）**

17.（本小题满分 10 分）$A,B$ 两组各有 $5$ 位病人，他们服用某种药物后的康复时间（单位：天）记录如下：

$A$ 组：12, 13, 14, 15, 16

$B$ 组：15, 16, 17, 14, $a$

假设所有病人的康复时间互相独立，从 $A,B$ 两组随机各选 $1$ 人，$A$ 组选出的人记为甲，$B$ 组选出的人记为乙．

（Ⅰ）求甲的康复时间不少于 $14$ 天的概率

（Ⅱ）如果 $a=25$，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；

（Ⅲ）当 $a$ 为何值时，$A,B$ 两组病人康复时间的方差相等？（结论不要求证明）

18.（本小题满分 12 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 的对边分别是 $a,b,c$，若 $5\left(a^2-b^2\right)=3bc$，$5\sin C=8\sin B$，$\angle BAC$ 的平分线交 $BC$ 于 $D$．

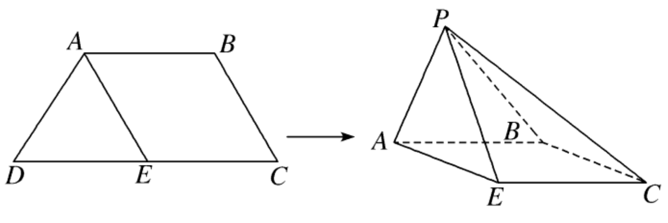
（Ⅰ）求 $\angle BAC$；

（Ⅱ）若 $AC=5$，求 $AD$．

19.（本小题满分 12 分）如图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AD=BC=AB=1$，$CD=2$，$E$ 为 $CD$ 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折到 $\triangle APE$ 的位置．

（Ⅰ）证明：$AE\perp PB$；

（Ⅱ）当四棱锥 $P-ABCE$ 的体积最大时，求二面角 $A-PE-C$ 的余弦值．



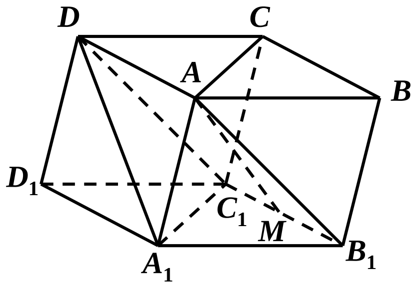
20.（本小题满分 12 分）在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD//BC$， $\angle CBD=\angle BDC=\alpha$， $\angle ACD=\beta$.

（Ⅰ）若 $\alpha=30^\circ$， $\beta=75^\circ$， $\sqrt{3}AC+\sqrt{2}CD=5$，求 $AC,CD$ 的长；

（Ⅱ）若 $\alpha+\beta>90^\circ$，求证： $AB<AD$.

21.（本小题满分 12 分）如图所示，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，

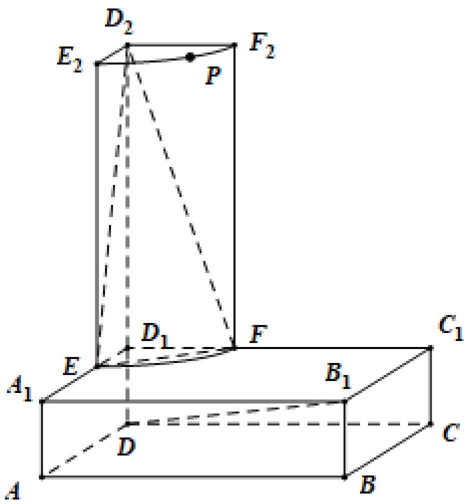
$AB_1=A_1B_1=2AA_1=2AC$， $\angle AA_1C_1=\dfrac{\pi}{3}$，且 $A_1C_1\perp B_1C_1$ .




（Ⅰ）求证： $B_1C_1\perp AA_1$；

（Ⅱ）若 $M$ 为 $B_1C_1$ 的中点，求直线 $AM$ 与平面 $DA_1C_1$ 所成角的正弦值.

22.（本小题满分 12 分）某人设计了一个工作台，如图所示，工作台的下半部分是个正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其底面边长为 $4$，高为 $1$，工作台的上半部分是一个底面半径为 $\sqrt{2}$ 的圆柱体的四分之一.



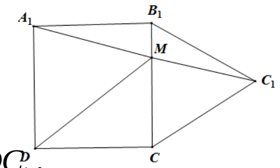

（Ⅰ）当圆弧 $E_2F_2$（包括端点）上的点 $P$ 与 $B_1$ 的最短距离为 $5\sqrt{2}$ 时，证明： $DB_1\perp$ 平面 $D_2EF$；

（Ⅱ）若 $D_1D_2=3$. 当点 $P$ 在圆弧 $E_2F_2$（包括端点）上移动时，求二面角 $P-A_1C_1-B_1$ 的正切值的取值范围.

# 泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（二）参考答案

**一、选择题**（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4：DCAB　:5-8：BABC




8.【解析】如图连接 $AB_1$、$CB_1$、$AC$，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $AD//B_1C_1$，$AD=B_1C_1$，所以四边形 $ADC_1B_1$ 为平行四边形，

所以 $DC_1//AB_1$，$DC_1\subset$ 面 $A_1DC_1$，$AB_1\not\subset$ 面 $A_1DC_1$，所以 $AB_1//$ 面 $A_1DC_1$，

同理可证 $CB_1//$ 面 $A_1DC_1$，又 $AB_1\cap CB_1=B_1$，所以面 $A_1DC_1//$ 面 $AB_1C$

所以点 $M$ 在 $\triangle B_1AC$ 的边上沿逆时针方向运动，

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $1$，将平面 $A_1B_1CD$ 与平面 $B_1C_1C$ 翻折到同一个平面,

当 $0\le x\le\sqrt{2}$ 时，$f(x)=MA_1+MC_1+MD=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+\left(\sqrt{2}-x\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$，

则 $f\left(\sqrt{2}-x\right)=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}-x\right)^2}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\sqrt{2}\right]$ 上的图象关于直线 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对称，

又 $f\left(0\right)=2+\sqrt{3}$，$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $f\left(0\right)>f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

同理 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$ 上的图象关于直线 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 对称，

$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[2\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$ 上的图象关于直线 $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 对称.

**二、选择题**（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9．AC　10．BD　11．AC　12．CD

**三、填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．$\sqrt{7}$　14．$-\frac{3}{2}$；$-3$　15．$13$　16．$1$　$3$

16.【详解】$\because$ $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos<\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2>=\cos<\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2>=\frac{1}{2}$　$\therefore$　$<\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2>=\frac{\pi}{3}$

不妨设 $\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\boldsymbol{e}_2=\left(1,0,0\right),\vec{b}=(m,n,t)$

$\because$ 则由题意可知:$\vec{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n=2,\vec{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=m=\frac{5}{2}$　$\therefore$ 得:$m=\frac{5}{2},n=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$,\boldsymbol{b}=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t\right)$

$\because$ $\left|\boldsymbol{b}\right|=2\sqrt{2}$,可得 $t^2=1$　$\because\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-y,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x,t\right)$

$\therefore$　$f^2\left(x,y\right)=\left|\boldsymbol{b}-\left(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\right)\right|^2=\left(x+\frac{y-4}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$

$=\left|\boldsymbol{b}-\left(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\right)\right|^2=\left(x+\frac{y-4}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+1$ $\therefore$　$x=1,y=2$ 时，$f^2\left(x,y\right)$ 取得最小值为 $1$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17．解：（Ⅰ）甲有$5$种取法，康复时间不少于$14$天的有$3$种取法，所以概率$P=\dfrac{3}{5}$； ……………3 分

（Ⅱ）如果$a=25$，从$A,B$两组随机各选$1$人，$A$组选出的人记为甲，$B$组选出的人记为乙共有$25$种取法，具体如下（甲，乙）：$(12,15)$，$(12,16)$，$(12,17)$，$(12,14)$，$(12,25)$；$(13,15)$，$(13,16)$，$(13,17)$，$(13,14)$，$(13,25)$；$(14,15)$，$(14,16)$，$(14,17)$，$(14,14)$，$(14,25)$；$(15,15)$，$(15,16)$，$(15,17)$，$(15,14)$，$(15,25)$；$(16,15)$，$(16,16)$，$(16,17)$，$(16,14)$，$(16,25)$． …………6 分

甲的康复时间比乙的康复时间长的列举如下：$(15,14)$，$(16,15)$，$(16,14)$有$3$种取法，……7 分

所以概率$P=\dfrac{3}{25}$． ……………………………8 分

（Ⅲ）把$B$组数据调整为$a$，14，15，16，17或14，15，16，17，$a$，

可见当$a=13$或$a=18$时，与$A$组数据方差相等． ……………………………10 分

18．解：（Ⅰ）因为$5\sin C=8\sin B$，所以$5c=8b$，即$c=\dfrac{8}{5}b$ ……………………………1 分

又因为$5\left(a^2-b^2\right)=3bc$，即$a^2-b^2=\dfrac{3bc}{5}$． ……………………………2 分

所以$\cos\angle BAC=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-\dfrac{3}{5}b\times\dfrac{8}{5}b+\left(\dfrac{8}{5}b\right)^2}{2b\times\dfrac{8}{5}b}=\dfrac{1}{2}$， ………………4 分

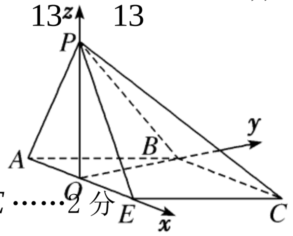
又$0<\angle BAC<\pi$，故$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$． ……………………………5 分

（Ⅱ）$\because AC=b=5$，$\therefore c=8$，$a^2-25=\dfrac{3}{5}\times5\times8$即$a^2=49$，$a=7$． ……………7 分

$\therefore\cos C=\dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\dfrac{1}{7}$（8 分）．$\therefore\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$． ……………………9 分

又$\because\angle DAC=\dfrac{\pi}{6}$，所以$\sin\angle ADC=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+C\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos C+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin C=\dfrac{13}{14}$．……10 分

由正弦定理得：$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin C}$，所以$AD=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin\angle ADC}=5\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{14}{13}=\dfrac{40\sqrt{3}}{13}$．…12 分




19．解：（Ⅰ）在等腰梯形$ABCD$中，连接$BD$，交$AE$于点$O$，

$\because AB//CE$且$AB=CE$，$\therefore$四边形$ABCE$为平行四边形，

$\therefore AE=BC=AD=DE$，$\therefore\triangle AED$为等边三角形

$\therefore$等腰梯形$ABCD$中，$\angle C=\angle ADE=\dfrac{\pi}{3}$，$BD\perp BC$，$\therefore BD\perp AE$……2 分

如图，翻折后可得$OP\perp AE,OB\perp AE$，且$OP\cap OB=O$，$\therefore AE\perp$平面$POB$………4 分

又$\because PB\subset$平面$POB$，$\therefore AE\perp PB$ ……………………………5 分

（Ⅱ）当四棱锥$P-ABCD$的体积最大时，平面$PAE\perp$平面$ABCE$．

又平面$PAE\perp$平面$ABCE=AE$，$PO\subset$平面$PAE$，$PO\perp AE$，$\therefore PO\perp$平面$ABCE$．

以$O$为坐标原点，$OE,OB,OP$所在的直线为分别$x$轴，$y$轴，$z$轴，建立空间直角坐标系，

则$P(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}),E(\dfrac{1}{2},0,0),C(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$ ……………………………6 分

$\therefore \overrightarrow{PE}=\left(\frac{1}{2},0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,，$\overrightarrow{EC}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ ……………………………7 分

设平面 PCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$ …………………………9 分

则设 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-1,z=1$，$\therefore \vec{n}=\left(\sqrt{3},\ -1,1\right)$ 为平面 $PCE$ 的一个法向量…………10 分

易知平面 $PAE$ 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(0,1,0\right)$　　又 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

由图知所求二面角 $A-PE-C$ 为钝角，$\therefore$二面角 $A-PE-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………12 分

20．解：（Ⅰ）由已知得 $\angle CBD=\angle BDC=30^\circ$，$\angle ACD=75^\circ$，所以 $\angle ACB=45^\circ$.

因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle ADB=\angle CBD=30^\circ$，$\angle DAC=\angle BCA=45^\circ$.

所以 $\angle ADC=60^\circ$. ……………………………2 分

在 $\Delta ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$ 即 $\frac{AC}{\sin 60^\circ}=\frac{CD}{\sin 45^\circ}$

所以 $AC=\frac{\sqrt{6}}{2}CD$. ……………………………4 分

又 $\sqrt{3}AC+\sqrt{2}CD=5$，所以 $AC=\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{2}$. ……………………………6 分

（Ⅱ）在 $\Delta ACB$ 中，由余弦定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos\angle ACB}$. ………………7 分

在 $\Delta ACD$ 中，由余弦定理得

$AD=\sqrt{AC^2+DC^2-2AC\times DC\cos\angle ACD}=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos\angle ACD}$. …9 分

$\because \alpha+\beta>90^\circ$，$\angle ACB=180^\circ-2\alpha-\beta$，

$\therefore \angle ACB-\angle ACD=\left(180^\circ-2\alpha-\beta\right)-\beta=180^\circ-2\left(\alpha+\beta\right)<0$，即 $\angle ACB<\angle ACD$…11 分

又 $0^\circ<\angle ACB<180^\circ$，$0^\circ<\angle ACD<180^\circ$，所以 $\cos\angle ACB>\cos\angle ACD$，

所以 $AB<AD$. ……………………………12 分

21．解：（Ⅰ）因为 $A_1C_1//AC, A_1C_1=AC$，所以四边形 $AA_1C_1C$ 为平行四边形，

又因为 $AA_1=AC$，所以四边形 $AA_1C_1C$ 为菱形，又因为 $\angle AA_1C=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\triangle AA_1C$ 是等边三角形， ……………………………1 分

连接 $AC_1$，设 $AA_1=2a$，则 $AC_1=2a, AB_1=4a$，$B_1C_1=\sqrt{A_1B_1^2-A_1C_1^2}=2\sqrt{3}a$，

所以 $AB_1^2=AC_1^2+B_1C_1^2$，所以 $B_1C_1\perp AC_1$， ……………………………3 分

又因为 $A_1C_1\perp B_1C_1, A_1C_1\cap AC_1=C_1$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 $ACC_1A_1$，………………………4 分

因为 $AA_1\subset$ 平面 $ACC_1A_1$，所以 $B_1C_1\perp AA_1$. ………………5 分

（Ⅱ）取 $A_1B_1$ 的中点 $E$，$A_1C_1$ 的中点 $O$，连接 $OE$，则由 $OE//B_1C_1$ 得 $OE\perp A_1C_1$，

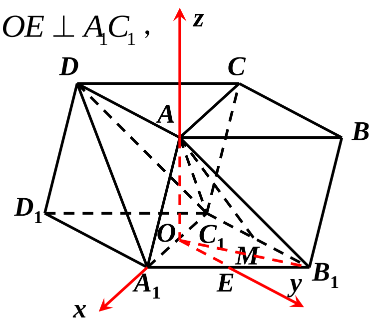
又因为 $AO\perp A_1C_1$，$AO\perp B_1C_1$，且 $B_1C_1\cap A_1C_1=C_1$，

所以 $AO\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，

由（Ⅰ）得 $AO=\sqrt{3}a$，设 $a=1$，以 $O$ 为坐标原点，

分别以 $\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OA}$ 为 $x,y,z$ 轴的正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $A_1(1,0,0), C_1(-1,0,0), B_1(-1,2\sqrt{3},0), A(0,0,\sqrt{3}), C(-2,0,\sqrt{3}), M(-1,\sqrt{3},0)$，

则 $\overrightarrow{C_1A_1}=(2,0,0), \overrightarrow{AM}=(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，…………………8 分

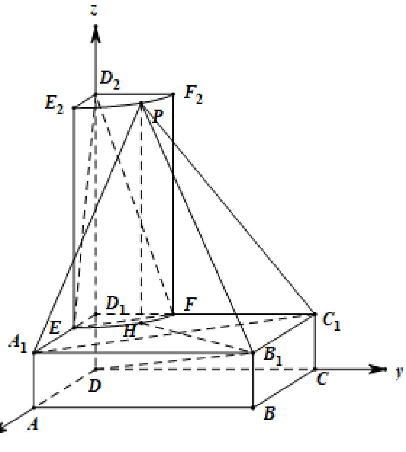
$\because \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{A_1B_1}=(-2,2\sqrt{3},0), \overrightarrow{C_1C}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\therefore \overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{C_1C}-\overrightarrow{DC}=(1,-2\sqrt{3},\sqrt{3})$，……9 分

设平面 $DA_1C_1$ 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1D}=x-2\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=2x=0\end{cases}$，

令 $y=1$，得 $\vec{n}=(0,1,2)$，……………………………………11 分

设直线 $AM$ 与平面 $DA_1C_1$ 所成角为 $\theta$，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{0+\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}\right|=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$ . ……12 分




22．解：（Ⅰ）作 $PH\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ 于 $H$，则 $H$ 在圆弧 $EF$ 上，

因为 $PB_1=\sqrt{PH^2+HB_1^2}$，所以当 $HB_1$ 取最小值时，$PB_1$ 最小，

由圆的对称性可知，$HB_1$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

所以 $PH=\sqrt{PB_1^2-HB_1^2}=4\sqrt{2}$，………………………………2 分

如图，以 $D$ 为原点，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_2}$ 的方向分别为 $x,y,z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0), D_2(0,0,1+4\sqrt{2}), E(\sqrt{2},0,1), F(0,\sqrt{2},1), B_1(4,4,1)$，

$\overrightarrow{DB_1}=(4,4,1), \overrightarrow{EF}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0), \overrightarrow{ED_2}=(-\sqrt{2},0,4\sqrt{2})$，……………………3 分

因为 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{EF}=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+0=0, \overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{ED_2}=-4\sqrt{2}+0+4\sqrt{2}=0$，

所以 $DB_1\perp EF, DB_1\perp ED_2$，因为 $EF\subset$ 平面 $D_2EF$，$ED_2\subset$ 平面 $D_2EF$，$ED_2\cap EF=E$，

所以 $DB_1\perp$ 平面 $D_2EF$ ……………………………………5 分

（Ⅱ）若 $D_1D_2=3$，由（Ⅰ）知 $A_1(4,0,1), C_1(0,4,1), B_1(4,4,1)$，

设 $P(a,b,4)$，因为 $a^2+b^2=2, a\ge 0, b\ge 0$，设 $a=\sqrt{2}\cos\theta, b=\sqrt{2}\sin\theta, \theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

所以 $a+b=2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\in[\sqrt{2},2]$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-4,4,0), \overrightarrow{A_1P}=(a-4,b,3)$，………………6 分

设平面 $PA_1C_1$ 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-4x_1+4y_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=(a-4)x_1+by_1+3z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$，则 $\vec{n}=(1,1,\dfrac{4-a-b}{3})$，……………………………………8 分

取平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量 $\vec{m}=(0,0,1)$，

设二面角 $P-A_1C_1-B_1$ 的大小为 $\theta$，$\theta$ 显然是钝角，

则 $\cos\theta=-\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=-\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\dfrac{a+b-4}{3}}{\sqrt{2+(\dfrac{a+b-4}{3})^2}}$，……………………………………10 分

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(\dfrac{a+b-4}{3})^2}}$，则 $\tan\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{a+b-4}\in[-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{6\sqrt{2}+3}{7}]$，

所以二面角 $P-A_1C_1-B_1$ 的正切值的取值范围为 $[-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{6\sqrt{2}+3}{7}]$. ……………………12 分