保密★启用前

2020-2021学年度上学期泉州市高中教学质量监测

高二数学参考答案与评分细则

2021．1

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．数列$\{a_n\}$中，若$a_n=\dfrac{n}{\sqrt{16-2n}}$，则$a_4=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．8

【命题意图】本题主要考查数列的概念，数列与函数的关系等基础知识，注重基础知识的考查，关注对数学运算等核心素养的考查．

【试题简析】$a_4=\dfrac{4}{\sqrt{16-2\times4}}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．故选B．

2．已知$\boldsymbol{a}=(1,3,5)$，$\boldsymbol{b}=(2,6,x)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则$x$的取值范围为

A．$(-\infty,-4)$　　B．$(-\infty,10)$　　C．$(-4,+\infty)$　　D．$(10,+\infty)$

【命题意图】本题考查空间向量的坐标运算，数量积的运算，解不等式等基础知识，渗透考查化归与转化思想，关注对数学运算，直观想象等数学核心素养的考查．

【试题简析】由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$可得$1\times2+3\times6+5x<0$，解得$x<-4$．选A．

3．若直线$2x-y+1=0$与直线$x+ay+3=0$垂直，则$a=$

A．-2　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

【命题意图】本小题主要考查直线与直线的位置关系等基础知识；考查运算求解等能力；体现基础性，导向对发展数学运算等核心素养的关注．

【试题简析】因为直线$2x-y+1=0$的斜率为2，所以直线$x+ay+3=0$的斜率为$-\dfrac{1}{2}$，所以$a=2$．选D．

4．若椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长是焦距的2倍，则$C$的离心率为

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{5}$

【试题简析】因为短轴长是焦距的2倍，即$b=2c$，所以$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{5}c$，

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．选B．

5．记正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3=4$，$S_4=5S_2$，则$S_6=$

A．2　　B．-21　　C．32　　D．63

【命题意图】本小题主要考查数列的通项公式，前n项和公式等基础知识，同时也注重考查数列的性质，体现性质简化运算的思路；考查数列的基本量法、连续相等项和的性质，体现对数学运算等核心素养的考查.

【试题简析】**解法1：**等比数列$\{a_n\}$为正项数列，所以$q>0$，由$S_4=5S_2$，得$q\neq 1$，

则$\dfrac{S_4}{S_2}=\dfrac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=5$，解得$q=2$，又$a_3=4$，所以$a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=\dfrac{4}{4}=1$，

故$S_6=\dfrac{1\left(1-2^6\right)}{1-2}=2^6-1=63$．故选D．

解法2：已知$S_4=5S_2$，可设$S_2=x,S_4=5x$，

因为$\{a_n\}$是正项等比数列，

所以S_2,S_4-S_2,S_6-S_4也是等比数列，即$x,5x-x,S_6-5x$是等比数列，

则$\dfrac{4x}{x}=\dfrac{S_6-5x}{4x}=4$，解得$S_6=21x$；

又$S_4=5S_2$，解得$q=2$，

所以$x=S_2=a_1+a_2=\dfrac{a_3}{q^2}+\dfrac{a_3}{q}=\dfrac{4}{4}+\dfrac{4}{2}=3,$

故$S_6=21x=21\times 3=63$．故选D．

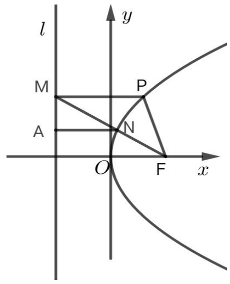
6．已知抛物线$E:y^2=4x$的焦点为F，准线为l，过E上一点P作l的垂线，垂足为M，MF交E于点N，若$\angle PFM=\dfrac{\pi}{6}$，则$\dfrac{|MN|}{|NF|}=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．2

【命题意图】本题考查抛物线的定义及标准方程，直线与抛物线的位置关系等基础知识，渗透考查化归与转化思想，数形结合思想，关注对数学运算，直观想象等数学核心素养的

考查.

【试题简析】过点 N 做 $NA\perp l$ 交 l 于 A，



因为 $|PM|=|PF|$，所以 $\angle PFM=\angle PMF=\dfrac{\pi}{6}$.

因为 $PM//x$ 轴，所以 $\angle PMF=\angle MFO=\dfrac{\pi}{6}$.

又因为 $NA//x$ 轴，所以 $\angle MNA=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\dfrac{|MN|}{|NA|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

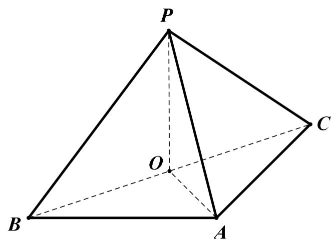
因为 $|NA|=|NF|$，所以 $\dfrac{|MN|}{|NF|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故选 C.

7. 三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=6$，$AC=8$，$\angle BAC=90^\circ$，若 $PA=PB=PC=5\sqrt{2}$，则点 B 到平面 PAC 的距离为

A. $3\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{30\sqrt{41}}{41}$　　C. $\dfrac{15\sqrt{34}}{17}$　　D. 6

【命题意图】本题考查空间中点到平面的距离，多面体的体积等基础知识，渗透考查化归与转化思想，关注对数学运算，空间想象等数学核心素养的考查.

【试题简析】依题意可得，P 在平面 ABC 的射影刚好是直角三角形 ABC 的斜边 BC 上的中点 O，如图中所示，易得 $OA=OB=OC=OP=5$.



解法一：$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot OP=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 6\times 8)\times 5=40$，

由已知得，等腰三角形 PAC 的腰 $PA=5\sqrt{2}$，底边 $AC=8$，

所以 $S_{\triangle PAC}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot\sqrt{PA^2-\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2}=4\sqrt{34}$，

记 d 为点 B 到平面 PAC 的距离，

则 $V_{P-ABC}=V_{B-PAC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAC}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{34}\times d=40$，解得 $d=\dfrac{15\sqrt{34}}{17}$.

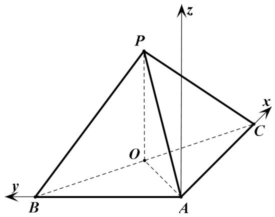
解法二：建立如图空间直角坐标系，$A(0,0,0),B(0,6,0),C(8,0,0),P(4,3,5)$，

$\overrightarrow{AC}=(8,0,0),\overrightarrow{AP}=(4,3,5),\overrightarrow{AB}=(0,6,0)$，

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 PAC 的一个法向量,

则有$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}8x_1=0\\ 4x_1+3y_1+5z_1=0\end{cases}$ 取$\boldsymbol{m}=(0,5,-3)$，

B到平面PAC的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}\right|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{30}{\sqrt{34}}=\dfrac{15\sqrt{34}}{17}$.



8．若$\overrightarrow{OA}=(m，n，0)$，$\overrightarrow{OB}=(0，\dfrac{4}{n}，p)$，$F(0，4，0)$，$\left|\overrightarrow{AF}\right|=m+1$，$\left|\overrightarrow{BF}\right|=p+1$，则$m+p$的最小值为

A． 1　　　B． 2　　　C． 3　　　D． 6

【命题意图】本题考查空间直角坐标的运算，解不等式等基础知识，渗透考查化归与转化思想，函数与方程思想，关注对数学运算，直观想象等数学核心素养的考查．

【试题简析】由$\begin{cases}\left|\overrightarrow{AF}\right|=m+1\\ \left|\overrightarrow{BF}\right|=p+1\end{cases}$得，$\begin{cases}m^2+(n-4)^2=m^2+2m+1\\ (\dfrac{4}{n}-4)^2+p^2=p^2+2p+1\end{cases}$，

整理得$2(m+p)=\left(n^2+\dfrac{16}{n^2}\right)-8\left(n+\dfrac{4}{n}\right)+30$

令$t=n+\dfrac{4}{n}$，则$n^2+\dfrac{16}{n^2}=t^2-8$，且$t\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

所以$2(m+p)=t^2-8t+22=(t-4)^2+6\geq 6$，从而$m+p\geq 3$，选C.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分．

9． 在无穷数列$\{a_n\}$中，若$a_p=a_q\left(p，q\in\mathbf{N}^*\right)$，总有$a_{p+1}=a_{q+1}$，此时定义$\{a_n\}$为"阶梯数列"．设$\{a_n\}$为"阶梯数列"，且$a_1=a_4=1$，$a_5=\sqrt{3}$，$a_8a_9=2\sqrt{3}$，则

A．$a_7=1$　　　B．$a_8=2a_4$　　　C．$S_{10}=10+3\sqrt{3}$　　　D．$a_{2020}=1$

【命题意图】本小题为数列新概念题，考查从题干中提取有用信息的能力，考查数学抽象、逻辑推理和数学运算等核心素养．

【试题简析】根据"阶梯数列"的定义知，$a_1=a_4=1$，有$a_2=a_5=\sqrt{3}$，重复递推，得$a_3=a_6$，$a_4=a_7=1$，选项A正确；

$a_5=a_8=a_2=\sqrt{3}$，又 $a_8a_9=2\sqrt{3}$，解得 $a_9=2$，则 $a_3=a_6=a_9=2$，且 $\frac{a_8}{a_4}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，

选项 B 错误；

数列 $\{a_n\}$ 各项依次是 $a_1=1$，$a_2=\sqrt{3}$，$a_3=2$；$a_4=1$，$a_5=\sqrt{3}$，$a_6=2$；$\cdots$ 可知

$\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列，因此 $S_{10}=3\left(1+\sqrt{3}+2\right)+1=10+3\sqrt{3}$，

$a_{2020}=a_{3\times673+1}=a_1=1$，选项 C，D 正确.

故选 A C D.

10.已知双曲线 $C_1:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 与椭圆 $C_2:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的左右焦点 F_1，F_2，且在第一象限相交于点 P，则

A. $|PF_1|=\sqrt{2}$

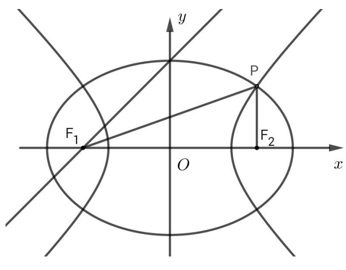
B. C_1 的渐近线方程为 $y=\pm x$

C. 直线 $y=x+2$ 与 C_1 有两个公共点

D. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{2}$

【命题意图】本题考查双曲线与椭圆的定义及标准方程，双曲线的渐近线等基础知识，同时渗透对双曲线和椭圆相关性质的考查，考查数形结合思想，化归与转化思想，注重考查数学运算，逻辑推理，直观想象等数学核心素养.

【试题简析】因为 $C_2:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，所以 $|F_1F_2|=4$，



因为双曲线 C_1 与椭圆 C_2 有相同的焦点，

所以 $b^2=4-2=2$，故 C_1 的渐近线方程为 $y=\pm x$，

所以选项 B 正确；

因为直线 $y=x+2$ 与渐近线 $y=x$ 平行，所以直线 $y=x+2$ 与 C_1 只有一个公共点，

故选项 C 错误；

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $\begin{cases}m+n=4\sqrt{2}\\m-n=2\sqrt{2}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=3\sqrt{2}\\n=\sqrt{2}\end{cases}$，

即$|PF_1|=3\sqrt{2}$，$|PF_2|=\sqrt{2}$，故选项 A 错误；

因为$|PF_2|=\sqrt{2}$，所以$PF_2\perp x$轴，

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2||PF_2|=2\sqrt{2}$，故选项 D 正确．

所以答案是 BD

11．已知$A(1，0)$，$B(4，0)$，圆C：$x^2+y^2=4$，则以下选项正确的有

A．圆C上到B的距离为 2 的点有两个

B．圆C上任意一点P都满足$|PB|=2|PA|$

C．若过A的直线被圆C所截得的弦为MN，则$|MN|$的最小值为$2\sqrt{3}$

D．若点D满足过D作圆C的两条切线互相垂直，则$|BD|$的最小值为$4-2\sqrt{2}$

【命题意图】本题主要考查点与圆，直线与圆，圆与圆等基础知识；考查运算求解能力、逻辑推理能力；考查数形结合思想；关注学生数学运算、直观想象、逻辑推理等素养．

【试题简析】因为B到圆C的最小距离为 2，所以不存在两个点到B的距离为 2，选项 A 错误；

设$P(x，y)$，$|PB|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{20-8x}$，$|PA|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{5-2x}$，

所以$|PB|=2|PA|$，选项 B 正确；

因为过A的直线被圆C所截得的最短弦为与AC垂直的弦，

所以最短弦为$2\sqrt{r^2-|AC|^2}=2\sqrt{3}$，选项 C 正确；

因为点D的轨迹是圆心为$(0，0)$，半径为$2\sqrt{2}$的圆，

所以$|BD|$的最小值为$4-2\sqrt{2}$，选项 D 正确．

所以答案是 BCD

12．已知图 1 中，A，B，C，D是正方形$EFGH$各边的中点，分别沿着AB，BC，CD，DA把$\triangle ABF$，$\triangle BCG$，$\triangle CDH$，$\triangle ADE$向上折起，使得每个三角形所在的平面都与平面$ABCD$垂直，再顺次连接$EFGH$，得到一个如图 2 所示的多面体，则

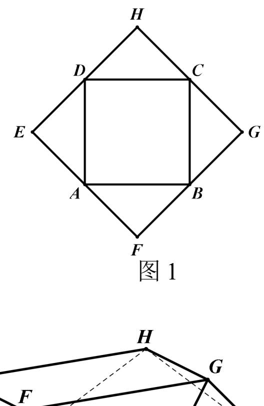


图 1

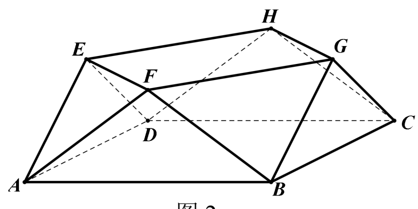


图 2

A．$\triangle AEF$是正三角形

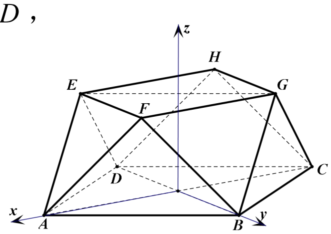
B．平面 $AEF \perp$ 平面 CGH

C．直线 CG 与平面 AEF 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$

D．当 $AB=2$ 时，多面体 $ABCD-EFGH$ 的体积为 $\frac{8}{3}$

【试题简析】因为 E,F 在平面 $ABCD$ 的射影分别为 AB，AD 中点,

所以在图 2 中， $EF=\frac{1}{2}BD$ ，由图 1 可知， $AF=AE=\frac{1}{2}BD$ ，



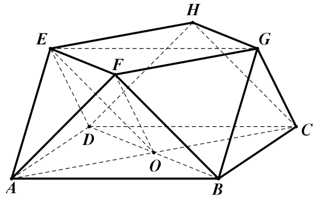
故 A 正确；

对于 B 和 C，**解法一**，可建立如图空间直角坐标系，

设 $AC=4$ 则有

$A(2,0,0),C(-2,0,0),E(1,-1,\sqrt{2}),F(1,1,\sqrt{2}),G(-1,1,\sqrt{2}),H(-1,-1,\sqrt{2})$

可知， $\overrightarrow{CG}=(1,1,\sqrt{2})$ ，平面 AEF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,1)$ ，



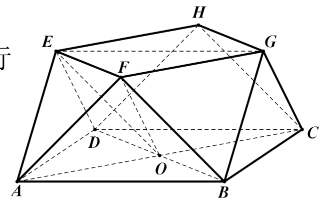
平面 CGH 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,-1)$ ， $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1\neq 0$ ，

所以平面 AEF 和平面 CGH 不相互垂直，所以 B 错误；

记直线 CG 与平面 AEF 所成角为 θ ，

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{CG},\boldsymbol{m}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{m}\right|}{\left|\overrightarrow{CG}\right|\cdot\left|\boldsymbol{m}\right|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

所以 $\tan\theta=\sqrt{2}$ ，故 C 正确；



解法二：连接 OE,OF ，易得 OC,EH,FG 之间的关系是平行且相等，从而可证得 $OF=CG=CH=OE=EF$ ，且平面 $OEF//$ 平面 CGH ,

而四面体 $O-AEF$ 为正四面体，由正四面体的性质可知，

相邻两个面所成的角的余弦值为 $\frac{1}{3}$,

所以平面 AEF 和平面 CGH 不相互垂直，所以 B 错误；

同时，正四面体的侧棱和底面所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，从而正切值为 $\sqrt{2}$ ，故 C 正确；对于 D，当 $AB=2$ 时，下底面面积为 4 ，上底面面积为 2 ，高为 1 ，所以所求

多面体的体积为$V=4\times1-\frac{1}{3}\times(4-2)\times1=\frac{10}{3}$，故 D 错误.

所以正确答案是 AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．圆心为$(1,0)$，半径为2的圆的标准方程是_______.

【试题简析】$(x-1)^2+y^2=4$.

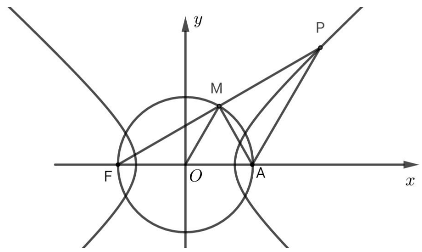
14．已知$\boldsymbol{a}=(-2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-3,2)$，则$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$____________.

【命题意图】本小题主要考查空间向量的坐标运算，向量的模及夹角等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力等；考查化归与转化思想、数形结合思想等；考查逻辑推理、直观想象、数学运算等.

【试题简析】$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-2\times1+(-1)\times(-3)+3\times2}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{1+9+4}}=\frac{1}{2}$

15．已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2\sqrt{3}}=1(a>0)$的左焦点为$F$，点$P$在$E$上且在第一象限，线段$PF$的中点在以原点$O$为圆心，$|OF|$为半径的圆上，若$\angle PFO=\frac{\pi}{6}$，则$E$的离心率为_________，$E$的标准方程为_________.

【命题意图】本题考查双曲线定义及标准方程，双曲线的离心率，考查直线与圆的位置关系，考查解析问题几何化思想，数形结合思想，划归与转化思想，关注对数学运算，逻辑推理，直观想象等数学核心素养的考查.



【试题简析】设线段PF的中点为M，双曲线的右焦点为A，焦距为$2c$，连接OM，AP，则$AP//OM$，且$|AP|=2|OM|=2c$，

又因为$|PF|-|PA|=2a$，所以$|PF|=2a+2c$，

在$\triangle PFA$中，因为$\angle PFA=\frac{\pi}{6}$，所以$|PF|=2\sqrt{3}c$，所以$2a+2c=2\sqrt{3}c$，解得：$e=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$．因为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，又因为$b^2=2\sqrt{3}=c^2-a^2$，所以$a^2=4$，所以$E$的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2\sqrt{3}}=1$.

16．设正项数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{6}a_n\left(a_n+3\right)$，则$a_n=$_______；

若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，不等式$2S_n+48\geq(-1)^n ka_n$恒成立，则k的取值范围是________.

【命题意图】本小题主要考查数列S_n和a_n的递推关系，能从S_n的递推关系中求出$\{a_n\}$的通项公式，考查数列不等式的参数取值范围等基础知识，体现分类与整合、化归与转化和函数与方程的数学思想；关注数学运算和逻辑推理等核心素养的考查.

【试题简析】 已知$S_n=\frac{1}{6}a_n\left(a_n+3\right)=\frac{1}{6}a_n^{\ 2}+\frac{1}{2}a_n$，得$S_{n-1}=\frac{1}{6}a_{n-1}^{\ 2}+\frac{1}{2}a_{n-1}(n\geq 2)$，

两式相减，得$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{6}a_n^{\ 2}+\frac{1}{2}a_n\right)-\left(\frac{1}{6}a_{n-1}^{\ 2}+\frac{1}{2}a_{n-1}\right)$，即

$3\left(a_n+a_{n-1}\right)=\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}\right)$，又$\{a_n\}$是正项数列，故$a_n-a_{n-1}=3$，

又由$S_1=a_1=\frac{1}{6}a_1^{\ 2}+\frac{1}{2}a_1$，解得$a_1=3$，

所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=3$，公差$d=3$的等差数列，

则$a_n=3+3\left(n-1\right)=3n$；代入，得$S_n=\frac{1}{6}a_n\left(a_n+3\right)=\frac{3}{2}\left(n^2+n\right)$.

不等式$2S_n+48\geq(-1)^n ka_n$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，即$n^2+n+16\geq(-1)^n k\cdot n$，

则$(-1)^n k\leq n+\frac{16}{n}+1$，

当n为奇数，$k\geq-\left(n+\frac{16}{n}+1\right)$，

因为，n为奇数时，$-\left(n+\frac{16}{n}+1\right)$的最大值为$-\frac{46}{5}$，故$k\geq-\frac{46}{5}$；

当n为偶数，$k\leq n+\frac{16}{n}+1$，

因为，n为偶数时，$n+\frac{16}{n}+1$的最小值为9，故$k\leq 9$.

综上，知k的取值范围是$k\in\left[-\frac{46}{5},9\right]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

等差数列$\{a_n\}$满足$a_2=2$，$a_1+a_5=6$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ．

【命题意图】本小题主要考查等差数列的通项、等比数列的定义与前 n 项和等基础知识；考查运算求解能力；考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等．体现基础性和综合性，导向对发展数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ．

由 $a_2=2$，$a_1+a_5=6$ 得 $\begin{cases}a_1+d=2,\\2a_1+4d=6,\end{cases}$ .... 2 分（各 1 分）

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=1.\end{cases}$ ....3 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n$ ． ....5 分

（2） 因为 $b_n=2^{a_n}=2^n$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列． .... 7 分

所以 $S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$ ． .... 10 分（公式 2 分，化简 1 分）

备注：考生如果采用其他解法根据解答过程分步酌情给分.

18．（12 分）

已知直线 l：$mx-y-2m+2=0$（$m\in\mathbf{R}$），圆 C：$x^2+y^2-2x-6y+8=0$ ．

（1）若 l 与圆 C 相切，求切点坐标；

（2）若 l 与圆 C 交于 A，B，且 $|OA|=|OB|$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【命题意图】本题主要考查点与圆，直线与圆，圆与圆等基础知识；考查运算求解能力、逻辑推理能力；考查数形结合思想；关注学生数学运算、直观想象、逻辑推理等素养.

【试题解析】

解法一：（1） 由 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ 得 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$， .... 1 分

所以圆 C 的圆心 $C(1,\ 3)$，半径 $r=\sqrt{2}$.

点 C 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|m-3-2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$． ....2 分

由 l 与 C 相切得 $d=r$，即 $\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$， ....3 分

解得 $m=1$． ....4 分

此时，l： $x-y=0$．

联立 $\begin{cases} x-y=0, \\ x^2+y^2-2x-6y+8=0, \end{cases}$ ....5 分

解得切点坐标为 $(2,2)$． ....6 分

（2） 因为 $|OA|=|OB|$，所以 O 在 AB 的垂直平分线上，

因为点 A， B 在圆 C 上，所以 C 也在 AB 的垂直平分线上， ....7 分

所以 $k_{AB}=-\dfrac{1}{k_{OC}}=-\dfrac{1}{3}$， .... 8 分

所以 $m=-\dfrac{1}{3}$，直线 AB 的方程为 $x+3y-8=0$． ....9 分

因为圆心 C 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|1+9-8|}{\sqrt{1+3^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$， ....10 分

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$． .... 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{4}{5}$． ....12 分

解法二：（1） 由 $mx-y-2m+2=0$ 得 $m(x-2)-y+2=0$，

所以直线 l 过定点 $(2,2)$． ....2 分

因为 $2^2+2^2-2\times2-6\times2+8=0$，所以点 $(2,2)$ 在圆 C 上． ....4 分

所以若 l 与圆 C 相切，则其切点坐标必为 $(2,2)$． .... 6 分

（2）由（1）知，可不妨假设 $A(2,2)$， ....7 分

因为 $|OA|=|OB|=2\sqrt{2}$，所以 A， B 是圆 C 与圆 $x^2+y^2=8$ 的交点， .... 8 分

两圆相减得直线 AB 的方程为 $x+3y-8=0$． ....9 分

由 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ 得 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$，

所以圆心 $C(1,3)$，半径 $r=\sqrt{2}$．..10 分

因为点 C 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|1+9-8|}{\sqrt{1+3^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，..11 分

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$．

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{4}{5}$．..12 分

备注：考生如果采用其他解法根据解答过程分步酌情给分.

19.（12 分）

已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $x=3$ 与 E 相交所得线段的长为 $6\sqrt{2}$．

（1）求 E 的方程；

（2）若不过点 F 的直线 l 与 E 相交于 A，B 两点，请从下列三个条件中任选两个作为补充条件，并尝试依据补充条件，求 l 的方程（若因条件选择不当而无法求出，需分析具体原因）．

① AB 中点的纵坐标为 3；

② $\triangle ABF$ 的重心在直线 $y=2$ 上；

③ $|AF|+|BF|=13$．

【命题意图】本题考查抛物线定义及标准方程，直线与抛物线位置关系，考查数形结合思想，化归与转化思想，考查学生的运算求解能力，根据自选条件解决问题的能力，关注学生数学运算、直观想象、逻辑推理等素养.

【试题简析】

解法一：（1）因为直线 $x=3$ 与 E 相交所得线段的长为 $6\sqrt{2}$，

所以 E 过点 $(3,3\sqrt{2})$，..2 分

即 $18=6p$，所以 $p=3$，..3 分

E 的标准方程为：$y^2=6x$．..4 分

（2）当直线l的斜率不存在时，l与E相交于A，B两点，AB的中点的纵坐标为0，不管选①②，①③，②③均不符合，..5 分

故直线l的斜率一定存在，设$l: y=kx+b(k\neq 0)$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$．

由（1）可知，$F(\frac{3}{2},0)$．

联立$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=6x \end{cases}$得：$ky^2-6y+6b=0$， ....6 分

所以$y_1+y_2=\frac{6}{k}$．...7 分

若选①③：

因为AB中点的纵坐标为3，所以$\frac{y_1+y_2}{2}=3$，即$y_1+y_2=6$，..............8 分

所以$\frac{6}{k}=6$，即$k=1$．..9 分

因为$|AF|+|BF|=13$，所以$x_1+x_2+p=x_1+x_2+3=13$，

所以$x_1+x_2=10$，...10 分

又因为$x_1+x_2=y_1+y_2-2b$，

所以$b=-2$，..11 分

故直线AB的方程为：$y=x-2$．..12 分

若选②③：

因为$\triangle ABF$的重心在直线$y=2$上，所以$\frac{y_1+y_2}{3}=2$，............................8 分

即$y_1+y_2=6$，

所以$\frac{6}{k}=6$，即$k=1$．..9 分

因为$|AF|+|BF|=13$，所以$x_1+x_2+p=x_1+x_2+3=13$，

所以$x_1+x_2=10$，...10 分

所以直线AB的中点坐标为$(5,3)$，又$k=1$，...11 分

故直线AB的方程为：$x-y-2=0$．...12 分

若选择①②，则无法得到直线 l 的方程，理由如下：

根据条件①②，得 $\begin{cases}\dfrac{y_1+y_2}{2}=3\\\dfrac{y_1+y_2+0}{3}=2\end{cases}$，………………………………………8 分

化简得：$y_1+y_2=6$，……………………………………………………………9 分

所以 $\dfrac{6}{k}=6$，即 $k=1$．…………………………………………………………10 分

两个条件等价，所以相当于只有一个条件，只能计算出直线的斜率，条件不够，无法计算出 b 的值，故选①②无法得到直线 l 的方程．（备注：言之有理，即可得分）……………………………………………………………………12 分

解法二：（1）同解法一.

（2）当直线 l 的斜率不存在时，l 与 E 相交于 A，B 两点的中点的纵坐标为 0，不管选①②，①③，②③均不符合，………………………………………………5 分

故直线 l 的斜率一定存在，设 l 的斜率为 $k(k\neq 0)$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$．

因为 A，B 在 E 上，

所以 $\begin{cases}{y_1}^2=6x_1\\{y_2}^2=6x_2\end{cases}$，即 ${y_1}^2-{y_2}^2=6(x_1-x_2)$，

所以 $\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)}=6$，…………………………………………6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6}{k}$．………………………………………………………………7 分

若选①③：

因为 AB 中点的纵坐标为 3，所以 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=3$，即 $y_1+y_2=6$，………………8 分

所以 $\dfrac{6}{k}=6$，即 $k=1$．……………………………………………………………9 分

因为 $|AF|+|BF|=13$，所以 $x_1+x_2+p=x_1+x_2+3=13$，

所以 $x_1+x_2=10$，………………………………………………………………10 分

所以直线 AB 的中点坐标为 $(5,3)$，又 $k=1$，…………………………………11 分

故直线 AB 的方程为：$x-y-2=0$．…………………………………………12 分

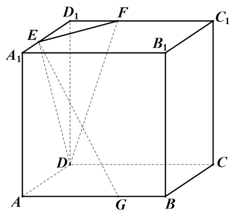
以下同解法一.

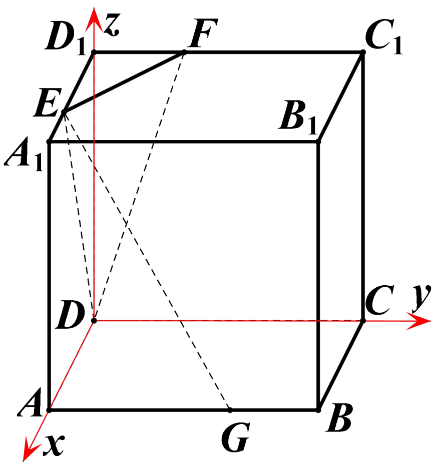
20．（12 分）

如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3， E， F， G 分别为棱 A_1D_1， D_1C_1， AB 上的点，且 $A_1E=D_1F=BG=1$.

（1）求直线 EG 与平面 DEF 所成角的正弦值；

（2）设直线 AA_1 与平面 EFG 交于点 H，求 $\dfrac{HA}{HA_1}$ 的值.





【试题解析】（1）分别以 DA,DC,DD_1 所以在直线为坐标轴建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$

则有 $D(0,0,0)$， $E(2,0,3)$， $F(0,1,3)$， $G(3,2,0)$ .... 1 分

备注：有两个坐标写对就可以得到第 1 分.

所以 $\overrightarrow{DE}=(2,0,3)$， $\overrightarrow{DF}=(0,1,3)$， $\overrightarrow{EG}=(1,2,-3)$ .... 2 分

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 DEF 的一个法向量

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1+3z_1=0\\ y_1+3z_1=0\end{cases}$ ....3 分

令 $z_1=-2$，则 $\boldsymbol{m}=(3,\ 6,\ -2)$ ....4 分

记θ为直线EG与平面DEF所成的角

$$\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{m}\right|}{\left|\overrightarrow{EG}\right|\cdot\left|\boldsymbol{m}\right|}=\frac{\left|1\times3+2\times6+(-3)\times(-2)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$$ .... 6 分

（2）解法一：设$H(3,0,h)$，

则$\overrightarrow{EF}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{EG}=(1,2,-3)$，$\overrightarrow{EH}=(1,0,h-3)$ .... 7 分

设$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面$EFG$的一个法向量

则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x_2+y_2=0\\ x_2+2y_2-3z_2=0\end{cases}$ .... 8 分

令$x_2=1$，则$\boldsymbol{n}=(1,\ 2,\ \frac{5}{3})$ .... 9 分

依题意可得，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EH}=0$，即$1\times1+0\times2+\frac{5}{3}(h-3)=0$ .... 10 分

解得，$h=\frac{12}{5}$，即$HA=\frac{12}{5}$，则$HA_1=3-\frac{12}{5}=\frac{3}{5}$ ....11 分

所以$\frac{HA}{HA_1}=4$ .... 12 分

解法二：设$H(3,0,h)$，则$\overrightarrow{EF}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{EG}=(1,2,-3)$，$\overrightarrow{EH}=(1,0,h-3)$ ....7 分

设$\overrightarrow{EH}=\lambda\overrightarrow{EF}+\mu\overrightarrow{EG}$，依题意有$\begin{cases}1=-2\lambda+\mu\\ 0=\lambda+2\mu\\ h-3=0-3\mu\end{cases}$， .... 9 分

解得$\begin{cases}\lambda=-\frac{2}{5}\\ \mu=\frac{1}{5}\\ h=\frac{12}{5}\end{cases}$ .... 10 分

即$HA=\frac{12}{5}$，则$HA_1=3-\frac{12}{5}=\frac{3}{5}$ ....11 分

所以$\frac{HA}{HA_1}=4$ .... 12 分

备注：第 2 问中，学生没有任何理论依据，直接猜出$\frac{HA}{HA_1}=4$，可得 2 分.

解法三:分别延长FE, B_1A_1交于点N，连接NG交AA_1于H' .... 7 分

由已知可得，$N\in EF, EF\subset$ 平面 EFG，所以 $N\in$ 平面 EFG .... 8 分

故 $NG\subset$ 平面 EFG，又 $H'\in NG$，所以 $H'\in$ 平面 EFG .... 9 分

所以 H' 为直线 AA_1 与平面 EFG 的交点 H .... 10 分

在平面图形 D_1FENA_1 中，由三角形相似，$\dfrac{A_1N}{D_1F}=\dfrac{A_1E}{D_1E}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $A_1N=\dfrac{1}{2}$ .... 11 分

在平面图形 NA_1HAG 中，由三角形相似，所以 $\dfrac{HA}{HA_1}=\dfrac{AG}{A_1N}=\dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)}=4$，........12 分

21.（12 分）

在数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 中，$a_{n+2}+6a_n=5a_{n+1}$，$b_n=a_{n+1}-3a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,且 $a_2=1$, $b_2=2$.

（1）求 a_3, b_1 的值；

（2）求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（3）设 $c_n=\dfrac{b_{n+1}}{(b_{n+1}-1)(b_{n+3}-1)}$，记 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$\dfrac{2}{7}\le S_n<\dfrac{4}{9}$.

【命题意图】本小题主要考查非特殊数列的通项公式求法，考查等比数列的通项公式，数列求和的裂项相消法等基础知识，考查学生的运算求解能力，体现化归与转化思想、函数与方程思想，考查数学运算核心素养.

【试题简析】（1）由 $b_2=a_3-3a_2$，可得 $a_3=5$ ....1 分

由 $a_3+6a_1=5a_2$ 可得，$a_1=0$ .... 2 分

所以 $b_1=a_2-3a_1=1$ .... 3 分

（2）由 $a_{n+2}+6a_n=5a_{n+1}$，得 $a_{n+2}-3a_{n+1}=2a_{n+1}-6a_n$， .... 4 分

故 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+2}-3a_{n+1}}{a_{n+1}-3a_n}=\dfrac{2a_{n+1}-6a_n}{a_{n+1}-3a_n}=2$（常数），................................. 5 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $b_1=1$，公比为 $q=2$ 的等比数列，................. 6 分

其通项公式为 $b_n=2^{n-1}$． ....7 分

（3） 由（2），得 $c_n=\dfrac{b_{n+1}}{(b_{n+1}-1)(b_{n+3}-1)}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+2}-1)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+2}-1}\right)，\ \text{......................8 分}$$

所以 $S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}+c_n$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{31}\right)+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{63}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+2}-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2^{n+2}-1}\right)$$ ....9 分

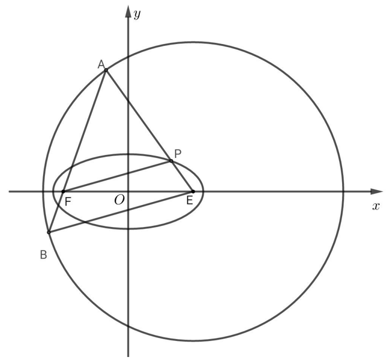
$<\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{9}$． ....10 分

因为数列 $c_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+2}-1}\right)>0$，所以 $\{S_n\}$ 为递增数列．.............................. 11 分

当 $n=1$ 时，S_n 取得最小值 $S_1=c_1=\dfrac{2}{7}$，所以 $\dfrac{2}{7}\le S_n<\dfrac{4}{9}$． ....12 分

备注：考生如果采用其他解法根据解答过程分步酌情给分．

22．（12 分）

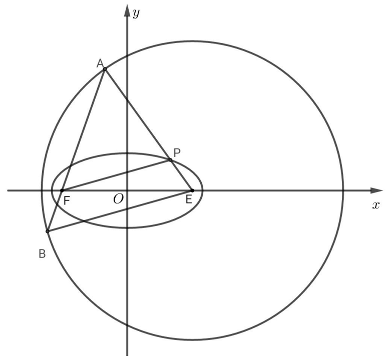


已知圆 E：$(x-\sqrt{3})^2+y^2=16$，圆 E 的弦 AB 过点 $F(-\sqrt{3},0)$，连接 AE，BE，过点 F 且与 BE 平行的直线与 AE 交于点 P，记点 P 的轨迹为曲线 M．

（1）求 M 的方程；

（2）过点 $N(1,0)$ 的直线 l 交 M 于 C，D 两点，试探究是否存在定点 Q，使得 $\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值．

【命题意图】本题考查曲线的轨迹方程，椭圆的定义及标准方程，直线与椭圆的位置关系，向量的基本运算等基础知识，考查学生运算求解能力，体现化归与转化思想，数形结合思想，考查数学运算，逻辑推理，直观想象等素养．



【试题简析】

（1） 因为$BE//FP$，

所以$\dfrac{|AP|}{|AE|}=\dfrac{|PF|}{|BE|}$，…………………………………………………………………1分

因为$|AE|=|BE|=4$，

所以$|AP|=|PF|$．…………………………………………………………………2分

又因为$|AP|+|PE|=4$，

所以$|PF|+|PE|=4>|EF|=2\sqrt{3}$．…………………………………………………………3分

由椭圆的定义可知，点P的轨迹是以E，F为焦点的椭圆，

设其轨迹方程为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．

求得：$a=2$，$b^2=1$，…………………………………………………………4分

故M的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq 0)$．…………………………………………………5分

（备注：没有写出$y\neq 0$，不扣分．）

（2） **解法一**：假设存在定点Q，使得$\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}$为定值，

当直线l的斜率存在时，设l：$y=k(x-1)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$得：$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，…………………………6分

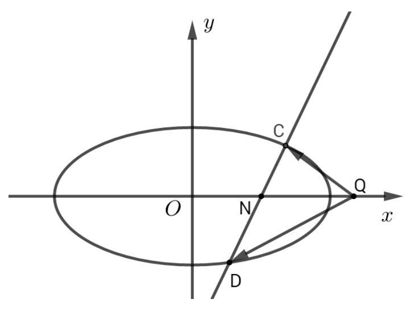
$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3k^2}{1+4k^2}$，…………………………7分

根据椭圆的对称性可知，点Q在x轴上，设$Q(x_0,0)$．…………………………………8分

因为$\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{QC}\cdot(\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}$，

又因为$\overrightarrow{QC}=(x_1-x_0,y_1)$，$\overrightarrow{QD}=(x_2-x_0,y_2)$，

所以$\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}=x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+{x_0}^2+y_1y_2$



$=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2x_0}{1+4k^2}+{x_0}^2+\dfrac{-3k^2}{1+4k^2}$

$=\dfrac{(1-8x_0)k^2-4}{1+4k^2}+{x_0}^2$. ……………………………………………………………9 分

为使 $\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值，只需 $\dfrac{(1-8x_0)k^2-4}{1+4k^2}+{x_0}^2$ 与 k 无关，

只需 $\dfrac{1-8x_0}{4}=\dfrac{-4}{1}$，

解得：$x_0=\dfrac{17}{8}$，即 $Q(\dfrac{17}{8},0)$. ……………………………………………………………10 分

经验算，取 $Q(\dfrac{17}{8},0)$ 时，$\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{33}{64}$ 为定值.

当直线 l 的斜率不存在时，$l:x=1$，$C(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$D(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

若 $Q(\dfrac{17}{8},0)$，同样有 $\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}=\dfrac{33}{64}$. ……………………………………………11 分

综上，存在定点 $Q(\dfrac{17}{8},0)$，使得 $\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值 $\dfrac{33}{64}$. ……………………………… 12 分

解法二：假设存在定点 $Q(x_0,y_0)$，使得 $\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值，

设直线 l 的方程为：$x=my+1$，$C(x_1，y_1)$，$D(x_2，y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得：$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，……………………………………………………… 6 分

$y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+4}$，……………………………………………………………………7 分

$x_1+x_2=\dfrac{8}{m^2+4}$，$x_1x_2=\dfrac{-4m^2+4}{m^2+4}$，……………………………………………………………………8 分

所以 $\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{QC}\cdot(\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}$

$=x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+{x_0}^2+y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+{y_0}^2$

$=\dfrac{-4m^2+4}{m^2+4}-\dfrac{8x_0}{m^2+4}+{x_0}^2-\dfrac{3}{m^2+4}+\dfrac{2my_0}{m^2+4}+{y_0}^2$

$=\dfrac{-4m^2+1-8x_0+2my_0}{m^2+4}+{x_0}^2+{y_0}^2$，………………………..……9 分

因为 $\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值，所以 $\dfrac{-4m^2+1-8x_0+2my_0}{m^2+4}+{x_0}^2+{y_0}^2$ 与 m 无关，

所以$\begin{cases}2y_0=0\\ \dfrac{-4}{1}=\dfrac{1-8x_0}{4}\end{cases}$，……………………………………………………………………………………11 分

解得：$\begin{cases}x_0=\dfrac{17}{8}\\ y_0=0\end{cases}$，此时$\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{33}{64}$，

所以存在定点$Q(\dfrac{17}{8},0)$，使得$\overrightarrow{QC}^2+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{CD}$为定值$\dfrac{33}{64}$．……………………………………12 分

（备注：直接写出定点定值，没有任何相应的理由、过程不给分．）