# 泉州七中 2021-2022 学年度高二上数学周练（7）答案

1 、C【解析】因为在空间直角坐标系中，点$(x, y, z)$关于 $x$ 轴的对称点的坐标为$(x,-y,-z)$，所以点$M(2,-1,3)$关于 $x$ 轴的对称点的坐标为$(2,1,-3)$．故选：C

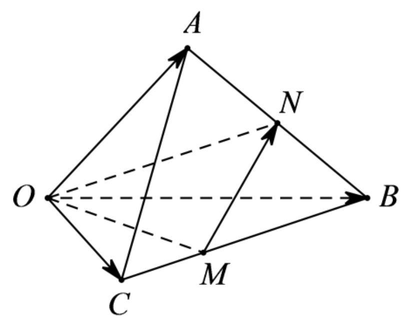
2、B【解析】设向量 $a$，$b$ 的夹角为 $\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\theta=120^\circ$，则两个方向向量对应的直线的夹角为 $180^\circ-120^\circ=60^\circ$．

3、A【解析】因为直线 $l_1: x+my+1=0$ 和 $l_2: mx+4y+2=0$ 互相平行，所以$1\times4-m^2=0$，解得 $m=2$ 或 $m=-2$．当 $m=2$ 时，$l_1: x+2y+1=0$ 与$l_2: 2x+4y+2=0$ 重合，不符合题意，故 $m=-2$．故选 A．

4. A 【解析】连接$OM, ON$,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$$. 故选：A




5. B【解析】直线$x\sin a-y+2=0$的倾斜角为$\theta$，则$\tan\theta=\sin\alpha$，$\because -1\le\sin\alpha\le 1$，故倾斜角$\theta$的取值范围是$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$，故选：B

6. B 【解析】将$(1+3\lambda)x+(1+2\lambda)y=2+5\lambda$变形得

$(x+y-2)+\lambda(3x+2y-5)=0$，所以$l$是经过两直线$x+y-5=0$和$3x+2y-5=0$的交点的直线系.

设两直线的交点为$Q$，由$\begin{cases}x+y-2=0,\\3x+2y-5=0,\end{cases}$得交点$Q(1,1)$，所以直线$l$恒过定点$Q(1,1)$，

于是点$P$到直线$l$的距离$d\le|PQ|=\sqrt{(-2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$，即点$P$到直线$l$的距离的最大值为$\sqrt{10}$．

7. C【解析】因为$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB_1}+7\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{AA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{BA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+6\overrightarrow{BA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}$

$=\overrightarrow{PA_1}+6(\overrightarrow{PA_1}-\overrightarrow{PB})-4(\overrightarrow{PD_1}-\overrightarrow{PA_1})=11\overrightarrow{PA_1}-6\overrightarrow{PB}-4\overrightarrow{PD_1}$，所以$M$，$B$，$A_1$，$D_1$四点共面. 故选：C.

8. A 【解析】$\because$平面$\alpha$的方程为$3x-5y+z-7=0$．$\therefore$平面$\alpha$的一个法向量为$\vec{m}=(3,-5,1)$，同理，可得平面$x-3y+7=0$的一个法向量为$\vec{a}=(1,-3,0)$，平面$4y+2z+1=0$的一个法向量为$\vec{b}=(0,4,2)$．设平面$x-3y+7=0$与平面$4y+2z+1=0$的交线的方向向量为$\overrightarrow{d_1}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{d_1}\cdot\vec{a}=x-3y=0\\\overrightarrow{d_1}\cdot\vec{b}=4y+2z=0\end{cases}$，取$y=1$，则$\overrightarrow{d_1}=(3,1,-2)$，设直线$l$与平面$\alpha$所成的角为$\theta$，则$\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{d_1}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m},\overrightarrow{d_1}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{d_1}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{35}$．故选：A.

9. BCD【解析】A：过点 $M\left(x_1,y_1\right)$ 斜率为 $k$ 的直线方程为 $y=k(x-x_1)+y_1$，而 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=k$ 不过 $M\left(x_1,y_1\right)$，故正确；B：当 $x$ 轴、$y$ 轴上的截距 $a$，$b$ 存在 0 时，不能用 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 表示，故错误；

C：当 $b<0$ 时，$y=kx+b$ 与 $y$ 轴的交点到原点的距离为 $-b$，故错误；

D：由 $l:ax+y+1=0$ 过定点 $(0,-1)$，该定点与线段 $AB$ 上的点所成直线的斜率范围为 $(-\infty,-\dfrac{3}{2}]\cup[2,+\infty)$，故要使直线 $l$ 与线段 $AB$ 有交点，则 $a\in(-\infty,-2]\cup[\dfrac{3}{2},+\infty)$，故错误. 故选：BCD

10. AD 【解析】设 $C(m,n)$，由已知△ $ABC$ 重心坐标为 $(\dfrac{m-4}{3},\dfrac{n+4}{3})$，

又重心在 $x-y+2=0$ 上，则 $\dfrac{m-4}{3}-\dfrac{n+4}{3}+2=0$，可得 $m-n=2$，∴A、D 符合要求. 故选：AD

11. AB 【解析】A：$A_1A,A_1D_1,A_1B_1$ 两两垂直，且 $|A_1A|=|A_1D_1|=|A_1B_1|$，所以

$\left(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1}\right)^2=\overrightarrow{A_1A}^2+\overrightarrow{A_1D_1}^2+\overrightarrow{A_1B_1}^2+2\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}+2\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}+2\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=3\overrightarrow{A_1B_1}^2$，正确；

B：由 $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$，所以 $\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})$

$=\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1B_1}^2-\overrightarrow{A_1A}^2-\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{A_1B_1}^2-\overrightarrow{A_1A}^2=0$，正确；

C：$\because\triangle ACD_1$ 是等边三角形，$\therefore\angle AD_1C=60°$，又 $A_1B//D_1C$，$\therefore$ 异面直线 $AD_1$ 与 $A_1B$ 所成的夹角为 $60°$，但是向量 $\overrightarrow{AD_1}$ 与向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角是 $120°$，错误；

D：由图知：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{0}$，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积不为 $|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}|$，错误；故选：AB.

12. $ACD$【解析】$\because$ 平面 $ADD_1A_1$ // 平面 $BCC_1B_1$，$A_1F\subset$ 平面 $ADD_1A_1$，∴$A_1F$ // 平面 $BCC_1B_1$，故 A 正确；

$V_{F-BB_1E}=V_{A-BB_1E}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times4\times3=6$，故 $B$ 错误；连接 $A_1F$，作 $EG//CD$ 交 $AD$ 于 $G$，连接 $FG$，

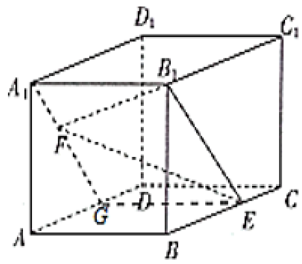
$\because A_1B_1\perp$ 平面 $ADD_1A_1$，$\therefore\angle A_1FB_1$ 为 $B_1F$ 与平面 $ADD_1A_1$ 所成的角，

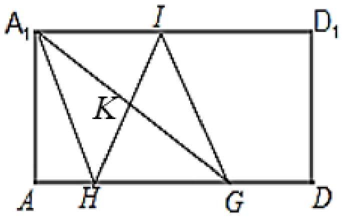
$\because EG\perp$ 平面 $ADD_1A_1$，$\therefore\angle EFG$ 为 $EF$ 与平面 $ADD_1A_1$ 所成角.

$\because$ 直线 $B_1F$，$EF$ 与平面 $ADD_1A_1$ 所成角的大小相等，$\therefore\angle A_1FB_1=\angle EFG$，所以 $\tan\angle A_1FB_1=\dfrac{A_1B_1}{A_1F}=\tan\angle EFG=\dfrac{EG}{FG}$，

又 $\because A_1B_1=EG$，$\therefore A_1F=FG$，所以点 $F$ 在 $A_1G$ 的中垂线上，即点 $F$ 在线段 $HI$ 上运动，

当点 $F$ 与点 $K$ 重合时，$A_1F//B_1E$，故 $C$ 正确；




$\because BC=2BB_1=6$，$E$ 为棱 $BC$ 上靠近 $C$ 的三等分点，$\therefore AA_1=3$，$AG=4$，$A_1G=5$，

$\because \cos\angle A_1GA=\frac{AG}{A_1G}=\frac{KG}{HG}$，$\therefore HG=A_1I=\frac{25}{8}$，

当点 $F$ 在点 $I$ 或点 $H$ 处时，线段 $A_1F$ 的长度取得最大值，最大值为 $\frac{25}{8}$；

当点 $F$ 在点 $K$ 处时，线段 $A_1F$ 的长度取得最小值，最小值为 $\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 线段 $A_1F$ 的长度的取值范围为 $\left[\frac{5}{2},\frac{25}{8}\right]$，故 $D$ 正确．故选：$ACD$．

13. −2【解析】因为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，且方向相同，所以 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，且 $\lambda>0$，从而有

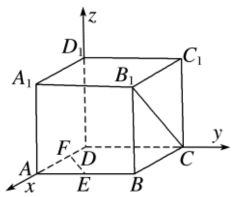
(−1，$x$，5)＝$\lambda$（$2x$，−8，$y$），所以 $\frac{-1}{2x}=\frac{x}{-8}=\frac{y}{5}>0$，解得 $x=-2$，符合题意．故答案为：−2

14. 8【解析】因为 $l_1\perp l_2$，所以 $(a-1)\times1+1\times2b=0$，即 $a+2b=1$．因为 $a>0,b>0$，所以

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+2b)=2+2+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq 4+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8,$$

当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$ 时等号成立，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 8

15. $\frac{\sqrt{10}}{5}$【解析】以 $D$ 为原点，$DA$ 为 $x$ 轴，$DC$ 为 $y$ 轴，$DD_1$ 为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$ 为线段 $AB$ 的中点，设正方体棱长为 2，




则 $D(0,0,0)$，$E(2,1,0)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-2,0,-2)$，

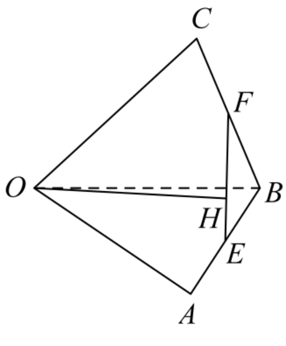
设 $F(m,0,0)\,(0\leqslant m\leqslant2)$，$\overrightarrow{EF}=(m-2,-1,0)$，

设异面直线 $B_1C$ 与 $EF$ 的夹角为 $\theta$，

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{|-2\times(m-2)|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(m-2)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}+1}}$，异面直线 $B_1C$ 与 $EF$ 所成角最小

时，则 $\cos\theta$ 最大，即 $m=0$ 时，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

16. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$；$\frac{\sqrt{17}}{6}$.【解析】由 $E$，$F$ 分别是 $AB$，$BC$ 的中点，因此 $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$，



$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$，故 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，又因 $H$ 是 $EF$ 上一点，且 $EH=\frac{1}{3}EF$，故 $\overrightarrow{EH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}$，

因此 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$，故有序数对 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$；

因 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$\angle BOC=\frac{\pi}{3}$，且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$，

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}$，又因 $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$，

故 $\left|\overrightarrow{OH}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}^2+\frac{1}{36}\overrightarrow{OC}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}$

$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{17}{36}}=\frac{\sqrt{17}}{6}$. 故答案为：$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$；$\frac{\sqrt{17}}{6}$.

17. 【解析】解：（1）设 $C(m,n)$，

Q $AB$ 边上的中线 $CM$ 所在直线方程为 $x-y-3=0$，$AC$ 边上的高 $BH$ 所在直线方程为 $x+2y-2=0$.

$\therefore\begin{cases}m-n-3=0\\ \frac{n-2}{m-4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3\\ n=0\end{cases}$ $\therefore C(3,0)$.

（2）设 $B(a,b)$，则 $\begin{cases}a+2b-2=0\\ \frac{a+4}{2}-\frac{2+b}{2}-3=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\frac{10}{3}\\ b=-\frac{2}{3}\end{cases}$，$\therefore B\left(\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right)$

$\therefore$ 直线 $AC$ 的方程为 $2x-y-6=0$ $\therefore$ 点 $B$ 到直线 $AC$ 的距离 $d=\frac{\left|2\times\frac{10}{3}+\frac{2}{3}-6\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$

18. 【解析】（1）设所求直线为 $2x+3y+m=0$，将 $(3,2)$ 代入得 $m=-12$

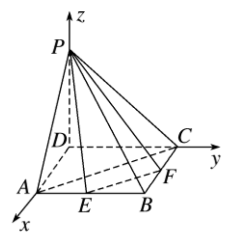
所以 $l$ 得直线方程为 $2x+3y-12=0$

（2）当直线过原点时，可设直线方程为 $y=kx$，将 $(3,2)$ 代入得 $k=\frac{2}{3}$，此时直线方程为 $2x-3y=0$

当直线不过原点时，可设直线的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，由已知得 $\begin{cases}\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1\\ a=3b\end{cases}$，解得 $a=9,b=3$，此时直线方程为 $x-3y-9=0$ 综上可得：所求直线方程为 $2x-3y=0$ 或 $x-3y-9=0$。

（3）显然直线 $l$ 的斜率存在，顾可设 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 将 $(3,2)$ 代入得 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1\geq2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{2}{b}}$，化简得 $ab\geq24$ 当且仅当 $\frac{3}{a}=\frac{3}{b}=\frac{1}{2}$ 时取等号，所以 $\Delta ABO$ 面积的最小值为 12，此时直线的方程为 $2x+3y-12=0$。

19. 解　(1)建立如图所示的空间直角坐标系，




则 $D(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$E\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$.

设 $DH\perp$平面 $PEF$，垂足为 $H$，则

$\overrightarrow{DH}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{DF}+z\overrightarrow{DP}=\left(x+\frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}x+y,\ z\right)$，$x+y+z=1$，

$\overrightarrow{PE}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ -1\right)$，$\overrightarrow{PF}=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right)$，所以$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{PE}=x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+y\right)-z=\frac{5}{4}x+y-z=0$.

同理，$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{PF}=x+\frac{5}{4}y-z=0$，

又 $x+y+z=1$，解得 $x=y=\frac{4}{17}$，$z=\frac{9}{17}$. 所以$\overrightarrow{DH}=\frac{3}{17}(2,2,3)$，所以$|\overrightarrow{DH}|=\frac{3}{17}\sqrt{17}$.

因此，点 $D$ 到平面 $PEF$ 的距离为$\frac{3}{17}\sqrt{17}$.

(2)由题意得，$AC\parallel EF$，直线 $AC$ 到平面 $PEF$ 的距离即为点 $A$ 到平面 $PEF$ 的距离，由(1)知$\overrightarrow{AE}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$平面 $PEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,2,3)$，所求距离为$\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

20. 解（1）证明：因为 $AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，所以 $AB\perp BC$，又有 $AB//A_1B_1$，所以 $BC\perp A_1B_1$.

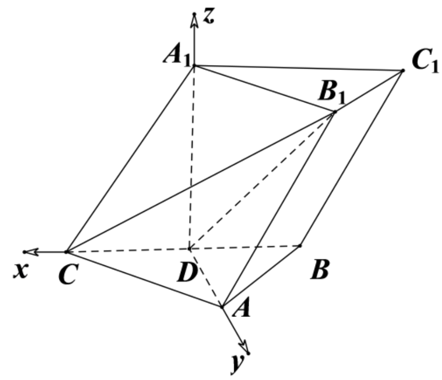
由顶点 $A_1$ 在底面 $ABC$ 内的射影恰好是 $AC$ 的中点 $D$，知 $A_1D\perp$平面 $ABC$，

所以 $A_1D\perp BC$. 又 $A_1B_1\cap A_1D=A_1$，所以 $BC\perp$平面 $A_1B_1D$.

（2）解：连接 $BD$，以 $D$ 为原点. 分别以 $DA$，$DB$，$DA_1$ 所在直线为 $x$，$y$，$z$ 轴建立空间直角坐标系（如图所示）. 由 $AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，点 $D$ 是 $AC$ 的中点，得 $BD=AD=CD=1$.

又 $AA_1=\sqrt{5}$，$A_1D\perp AC$，得 $A_1D=2$，所以 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$A_1(0,0,2)$，$C(-1,0,0)$

设平面 $AA_1B_1$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=y\\ x=2z\end{cases}$，令 $z=1$，



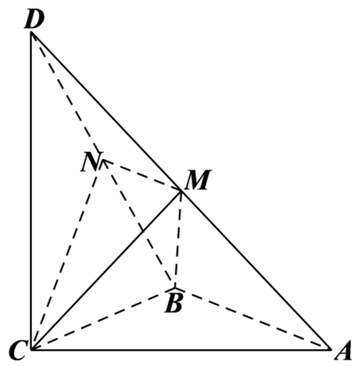

有 $\vec{n}=(2,2,1)$.

由（1）知平面 $A_1B_1D$ 的法向量为 $\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$.

所以二面角 $A-A_1B_1-D$ 的余弦值为

$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{CB}\right\rangle\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{2+2+0}{3\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

21【详解】(1) $\because BC \perp CD$，$N$ 为 $BD$ 的中点，则 $NC=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，




又因为 $M$ 为 $AD$ 的中点，则 $MN=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $MN//AB$，

$\because MC=1$，则 $MN^2+NC^2=MC^2$，$\therefore MN \perp NC$，

$\because AB \perp BD$，则 $MN \perp BD$，$\because BD \cap NC=N$，$\therefore MN \perp$ 平面 $BCD$，

$\because MN \subset$ 平面 $MNC$，因此，平面 $MNC \perp$ 平面 $BCD$；

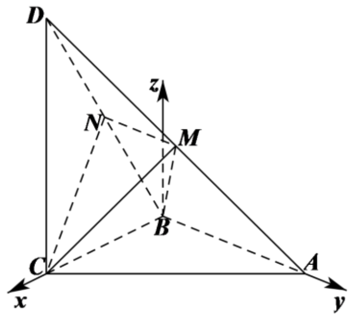
(2) $\because MN \perp$ 平面 $BCD$，$AB//MN$，$\therefore AB \perp$ 平面 $BCD$，$\because BC \subset$ 平面 $BCD$，则 $AB \perp BC$，

$\because AB \perp BD$，所以，二面角 $D-BA-C$ 的平面角为 $\angle CBD=60^\circ$，

所以，$BC=BD\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CD=BD\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

以点 $B$ 为坐标原点，$BC$、$BA$ 所在直线分别为 $x$、$y$ 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$、

$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$、$A\left(0,\sqrt{2},0\right)$、$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$、$M\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$、$N\left(\frac{\sqrt{2}}{4},0,\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，



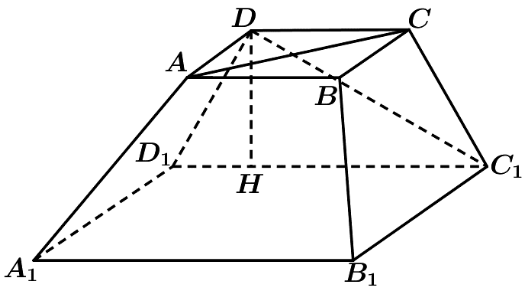

设平面 $MNC$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{NM}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{CN}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},0,\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}=\frac{\sqrt{2}}{2}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CN}=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{6}}{4}z=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt{3}$，可得 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$，

因为 $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，所以，$\cos<\overrightarrow{BM},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{1\times 2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

因此，直线 $BM$ 和平面 $MNC$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

22. 【详解】(1) 如图，在梯形 $CC_1D_1D$ 中，因为




$CC_1=CD=DD_1=\frac{1}{2}C_1D_1=1$，

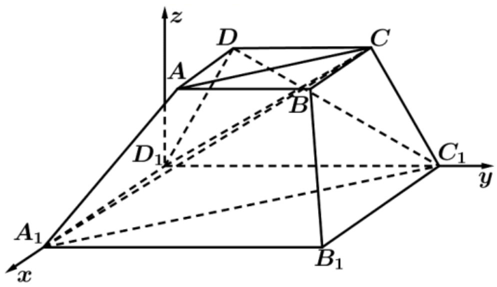
作 $DH \perp D_1C_1$ 于 $H$，则 $D_1H=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\angle DD_1H=\frac{1}{2}$，所以 $\angle DD_1C_1=\frac{\pi}{3}$，

连结 $DC_1$，由余弦定理可求得 $DC_1=\sqrt{3}$，因为 $DC_1^2+DD_1^2=D_1C_1^2$，所以 $DC_1 \perp DD_1$，

因为平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 $CC_1D_1D$ 且交于 $DD_1$，所以 $DC_1 \perp$ 平面 $AA_1D_1D$，

因为 $AD\subset$ 平面 $AA_1D_1D$，所以 $AD\perp DC_1$，因为 $AD\perp DC$，$DC\cap DC_1=D$，

所以 $AD\perp$ 平面 $CC_1D_1D$；




（2）连结 $A_1C_1$，由（1）可知，$A_1D_1\perp$ 平面 $CC_1D_1D$，

以 $D_1$ 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图所示，

因为 $A_1D_1\perp$ 平面 $CC_1D_1D$，所以 $A_1C$ 在平面 $CC_1D_1D$ 内的射影为 $D_1C$，

所以 $A_1C$ 与平面 $CC_1D_1D$ 所成的角为 $\angle A_1CD_1$，即 $\angle A_1CD_1=\dfrac{\pi}{3}$，

在 $Rt\triangle A_1CD_1$ 中，因为 $CD_1=\sqrt{3}$，所以 $A_1D_1=3$，

则 $D_1(0,0,0)$，$A_1(3,0,0)$，$D\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C_1(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{D_1D}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{D_1A_1}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-3,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=\left(-3,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

设平面 $AA_1D_1D$ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{D_1D}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{D_1A_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ 3x=0\end{cases}$，

令 $y=3$，则 $x=0$，$z=-\sqrt{3}$，故 $\vec{m}=(0,3,-\sqrt{3})$，

设平面 $AA_1C_1C$ 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-3a+2b=0\\ -3a+\dfrac{3}{2}b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=0\end{cases}$，

令 $a=2$，则 $b=3$，$c=\sqrt{3}$，故 $\vec{n}=(2,3,\sqrt{3})$，所以 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times 4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

由图可知，二面角 $C-AA_1-D$ 锐二面角，故二面角 $C-AA_1-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$